Mathématiques

DS 7 • CORRIGÉ

Exercice I

Une équation différentielle

1. Soit y une solution de (E_1) définie sur $]0,+\infty[$.

Pour tout $t>0$, on pose $z(t) \coloneqq t\,y(t)$.

(a) Montrer que z' est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle d'inconnue x :

$$t\,x' - x = \frac{t^3}{(1+t^2)^2}. \tag{E_2}$$

▶ Comme y est solution de (E_1), y est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ donc z l'est également.

▶ Puisque, pour tout $t>0$, $y(t)=\dfrac{z(t)}{t}$, on a

$$\forall t \in\,]0,+\infty[, \qquad \begin{cases} y'(t) = \dfrac{z'(t)}{t} - \dfrac{z(t)}{t^2} \\ y''(t) = \dfrac{z''(t)}{t} - \dfrac{2z'(t)}{t^2} + \dfrac{2z(t)}{t^3}. \end{cases}$$

▶ En substituant dans (E_1), on a

$$t^2\left(\frac{z''(t)}{t} - \frac{2z'(t)}{t^2} + \frac{2z(t)}{t^3}\right) + t\left(\frac{z'(t)}{t} - \frac{z(t)}{t^2}\right) - \frac{z(t)}{t} = \frac{t^3}{(1+t^2)^2},$$

donc

$$t\,z''(t) - z'(t) = \frac{t^3}{(1+t^2)^2},$$

donc $\boxed{z' \text{ vérifie l'équation } (\mathrm{E}_2).}$

(b) Résoudre l'équation (E_2) et montrer que

$$\exists K \in \mathbb{R} : \quad \forall t > 0, \quad z'(t) = Kt - \frac{t}{2(1+t^2)}.$$

▶ Sur $I :=]0, +\infty[$, l'équation (E_2) s'écrit $x' - \dfrac{1}{t}x = \dfrac{t^2}{(1+t^2)^2}$.

Sous cette forme, (E_2) est une équation différentielle linéaire résolue, du premier ordre, à coefficients continus.

▶ Une primitive sur I de $t \longmapsto \dfrac{-1}{t}$ est $t \longmapsto -\ln(t)$ donc l'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène associée à (E_2) est

$$\{t \longmapsto \lambda t \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

▶ Déterminons une solution particulière de (E_2) par la méthode de variation de la constante.

Soit $x : t \longmapsto K(t)t$ avec K une fonction définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \text{ est solution de } (E_2) \quad &\iff \quad \forall t > 0, \ x'(t) - \frac{x(t)}{t} = \frac{t^2}{(1+t^2)^2} \\
&\iff \quad \forall t > 0, \ t\,K'(t) + K(t) - \frac{1}{t}t\,K(t) = \frac{t^2}{(1+t^2)^2} \\
&\iff \quad \forall t > 0, \ t\,K'(t) = \frac{t^2}{(1+t^2)^2} \\
&\iff \quad \forall t > 0, \ K'(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2} \\
&\iff \quad \exists C \in \mathbb{R} : \ \forall t > 0, \ K(t) = -\frac{1}{2(1+t^2)} + C.
\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E_2) est donc $t \longmapsto -\dfrac{t}{2(1+t^2)}$.

▶ Donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ sur } I \text{ est } \left\{t \longmapsto K\,t - \dfrac{t}{2(1+t^2)} \ ; \ K \in \mathbb{R}\right\}.}$

▶ Puisque z' vérifie (E_2), on a bien le résultat souhaité.

(c) En déduire l'expression de y.

► Fixons $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t > 0$, $z'(t) = Kt - \dfrac{t}{2(1+t^2)}$.

Par intégration, fixons $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t > 0, \quad z(t) = K\frac{t^2}{2} - \frac{1}{4}\ln(1+t^2) + C.$$

► On a donc, par définition de z,

$$\boxed{\forall t > 0, \quad y(t) = K\frac{t}{2} - \frac{\ln(1+t^2)}{4t} + \frac{C}{t}.}$$

2. À l'aide d'un développement limité de f au voisinage de 0, déterminer l'allure de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 0^+.

► Puisque $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ et que $t^2 \xrightarrow[t\to 0]{} 0$, on a

$$\begin{aligned} f(t) &= \alpha t - \frac{1}{4t}\left(t^2 - \frac{1}{2}t^4 + \underset{t\to 0}{o}(t^4)\right) \\ &= \left(\alpha - \frac{1}{4}\right)t + \frac{1}{8}t^3 + \underset{t\to 0}{o}(t^3). \end{aligned}$$

► On a donc $\boxed{\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 0.}$

► De plus, $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ admet pour tangente à l'origine la droite d'équation } y = \left(\alpha - \frac{1}{4}\right)t.}$

► Enfin, comme $f(t) - \left(\alpha - \dfrac{1}{2}\right)t = \dfrac{1}{8}t^3 + \underset{t\to 0}{o}(t^3)$ et que $\dfrac{1}{8}t^3$ est positif au voisinage de 0^+, on a

$$\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est au-dessus de sa tangente au voisinage de } 0^+.}$$

Exercice II

Autour des séries de Bertrand

1. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$

(a) dans le cas où $\alpha > 1$;

▶ On suppose que $\alpha > 1$.

▶ Pour $n \geqslant 3$, puisque $\ln(n) \geqslant \ln(3) \geqslant 1$ et $\beta > 0$, on a $0 \leqslant n^\alpha \leqslant n^\alpha (\ln n)^\beta$ donc

$$0 \leqslant \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

▶ Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n^\alpha}$ converge comme une série de Riemann convergente.

▶ Ainsi, par comparaison pour les séries à termes positifs,

$$\boxed{\text{dans le cas } \alpha > 1\text{, la série } \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ converge.}}$$

Dans le cas où l'on ne suppose pas $\beta > 0$, on montre que $\displaystyle\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$ avec $\gamma \in]1, \alpha[$, et l'on conclut par comparaison à une série de Riemann convergente.

(b) dans le cas où $\alpha < 1$.

▶ On suppose que $\alpha > 1$.

▶ On a $\displaystyle n\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \frac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^\beta}$. Puisque $1 - \alpha > 0$, on a, par croissances comparées,

$$\frac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \quad \textit{i.e.} \quad \frac{(\ln n)^\beta}{n^{1-\alpha}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

▶ Alors $\displaystyle\frac{n^\alpha (\ln n)^\beta}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ donc $\displaystyle\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}\right)$.

▶ Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n}$ diverge donc, par minoration pour les séries à termes positifs, on a

$$\boxed{\text{dans le cas } \alpha < 1\text{, la série } \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ diverge.}}$$

2. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \geqslant 2$ et $m > n$.

Montrer soigneusement que

$$\int_n^m f(t)\,\mathrm{d}t + f(m) \leqslant \sum_{k=n}^{m} f(k) \leqslant f(n) + \int_n^m f(t)\,\mathrm{d}t.$$

▶ Soit $k \geqslant n$.

▷ La fonction f étant décroissante sur $[k, k+1]$, on a

$$\forall t \in [k, k+1], \quad f(t) \leqslant f(k).$$

▷ Par continuité de f sur $[k, k+1]$ et croissance de l'intégrale sur ce segment, on a

$$\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k). \qquad (\star_1)$$

▶ En sommant $(\star_1)$ entre $k = n$ et $k = m-1$, on a, par la relation de Chasles,

$$\int_n^m f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} f(k),$$

donc, en ajoutant $f(m)$,

$$\int_n^m f(t)\,\mathrm{d}t + f(m) \leqslant \sum_{k=n}^{m} f(k).$$

▶ De même, on établit que

$$\forall k > n, \quad f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad (\star_2)$$

donc, en sommant $(\star_2)$ entre $k = n+1$ et $k = m$,

$$\sum_{k=n+1}^{m} f(k) \leqslant \int_n^m f(t)\,\mathrm{d}t,$$

d'où, en ajoutant $f(n)$,

$$\sum_{k=n}^{m} f(k) \leqslant f(n) + \int_n^m f(t)\,\mathrm{d}t.$$

▶ Ainsi, on a bien obtenu

$$\boxed{\int_n^m f(t)\,\mathrm{d}t + f(m) \leqslant \sum_{k=n}^{m} f(k) \leqslant f(n) + \int_n^m f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur β pour que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge.

► La série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge si, et seulement si, la suite $(\mathrm{S}_N)_{N\geqslant 2}$ converge.

De plus, puisqu'il s'agit d'une série à termes positifs, $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge si, et seulement si, $(\mathrm{S}_N)_{N\geqslant 2}$ est majorée.

► Soit $N \geqslant 2$. D'après la question **2.** avec $n = 2$ et $m = N$, on a

$$\int_2^N \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{N(\ln N)^\beta} \leqslant \mathrm{S}_N \leqslant \frac{1}{2(\ln 2)^\beta} + \int_2^N \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t,$$

or on a

$$\int_2^N \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \Big[\ln(\ln t)\Big]_2^N = \ln(\ln N) - \ln(\ln 2) & \text{si} \quad \beta = 1 \\ \dfrac{1}{-\beta+1}\Big[(\ln t)^{-\beta+1}\Big]_2^N = \dfrac{1}{\beta-1}\left(\dfrac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}} - \dfrac{1}{(\ln N)^{\beta-1}}\right) & \text{si} \quad \beta \neq 1. \end{cases}$$

► Dans le cas où $\beta = 1$, puisque la suite $\Big(\ln(\ln N)\Big)_{N\geqslant 2}$ diverge, on a, par minoration,

$$\mathrm{S}_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty.$$

► Dans le cas où $\beta \in\,]0,1[$, on a $\int_2^N \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$ donc, par minoration,

$$\mathrm{S}_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty.$$

► Dans le cas où $\beta > 1$, on a

$$\forall N \geqslant 2, \quad \mathrm{S}_N \leqslant \frac{1}{\beta-1}\frac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}} - \underbrace{\frac{1}{\beta-1}\frac{1}{(\ln N)^{\beta-1}}}_{\geqslant 0} \leqslant \frac{1}{\beta-1}\frac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}},$$

donc la suite $(\mathrm{S}_N)_{N\geqslant 2}$ est majorée, donc la série converge.

► En conclusion, on a

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \beta > 1.}$$

4. On se place dans le cas où $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge.

(a) Montrer que

$$\mathrm{R}_N = \frac{1}{\beta-1}\frac{1}{(\ln N)^{\beta-1}} + \underset{N\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{N(\ln N)^\beta}\right).$$

▶ Soit $N \geqslant 2$. Soit $M > N$. On pose

$$\mathrm{I}_{N,M} \coloneqq \int_N^M f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{S}_{N,M} \coloneqq \sum_{k=N}^{M} f(k).$$

D'après la question **2.** avec $n = N$ et $m = M$ et les calculs précédents (cas où $\beta > 1$), on a

$$\mathrm{I}_{N,M} + \frac{1}{M(\ln M)^\beta} \leqslant \mathrm{S}_{N,M} \leqslant \frac{1}{N(\ln N)^\beta} + \mathrm{I}_{N,M}.$$

▶ À N fixé, on a

$$\mathrm{I}_{N,M} = \frac{1}{\beta-1}\left(\frac{1}{(\ln N)^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln M)^{\beta-1}}\right) \xrightarrow[M\to+\infty]{} \frac{1}{\beta-1}\frac{1}{(\ln N)^{\beta-1}},$$
$$\frac{1}{M(\ln M)^\beta} \xrightarrow[M\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{S}_{N,M} \xrightarrow[M\to+\infty]{} \mathrm{R}_N,$$

donc, par passage des inégalités larges à la limite,

$$\frac{1}{\beta-1}\frac{1}{(\ln N)^{\beta-1}} \leqslant \mathrm{R}_N \leqslant \frac{1}{N(\ln N)^\beta} + \frac{1}{\beta-1}\frac{1}{(\ln N)^{\beta-1}},$$

d'où

$$0 \leqslant \mathrm{R}_N - \frac{1}{\beta-1}\frac{1}{(\ln N)^{\beta-1}} \leqslant \frac{1}{N(\ln N)^\beta}.$$

▶ Finalement, on a bien établi que

$$\boxed{\mathrm{R}_N = \frac{1}{\beta-1}\frac{1}{(\ln N)^{\beta-1}} + \underset{N\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{N(\ln N)^\beta}\right).}$$

(b) Donner un équivalent de R_N lorsque $N \to +\infty$.

On a $\dfrac{\mathrm{R}_N}{\frac{1}{\beta-1}\frac{1}{(\ln N)^{\beta-1}}} - 1 = \underset{N\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\dfrac{1}{N\ln(N)}\right)$, d'où $\dfrac{\mathrm{R}_N}{\frac{1}{\beta-1}\frac{1}{(\ln N)^{\beta-1}}} - 1 \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$, donc

$$\boxed{\mathrm{R}_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\beta-1}\frac{1}{(\ln N)^{\beta-1}}.}$$

5. On se place dans le cas où $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ diverge.

Déterminer un équivalent de S_N lorsque $N\to+\infty$.

▶ Pour $N\geqslant 2$, on pose $\mathrm{I}_N := \displaystyle\int_2^N f(t)\,\mathrm{d}t$.

▶ Pour $N\geqslant 2$, d'après la question **2.** avec $n=2$ et $m=N$ et les calculs précédents (cas où $\beta<1$), on a

$$\mathrm{I}_N+\frac{1}{N(\ln N)^\beta}\leqslant \mathrm{S}_N\leqslant \frac{1}{2(\ln 2)^\beta}+\mathrm{I}_N,$$

d'où

$$1+\frac{1}{\mathrm{I}_N}\frac{1}{N(\ln N)^\beta}\leqslant \frac{\mathrm{S}_N}{\mathrm{I}_N}\leqslant \frac{1}{\mathrm{I}_N}\frac{1}{2(\ln 2)^\beta}+1.$$

▶ Or, comme $\beta\leqslant 1$, on a $\mathrm{I}_N\xrightarrow[N\to+\infty]{}+\infty$ donc $\dfrac{1}{\mathrm{I}_N}\xrightarrow[N\to+\infty]{}0$.

Aussi, $\dfrac{1}{N(\ln N)^\beta}\xrightarrow[N\to+\infty]{}0$.

▶ Par passage des inégalités larges à la limite, $\dfrac{\mathrm{S}_N}{\mathrm{I}_N}\xrightarrow[N\to+\infty]{}1$ donc

$$\mathrm{S}_N\underset{N\to+\infty}{\sim}\mathrm{I}_N.$$

▶ Or on a

$$\mathrm{I}_N=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta-1}\left(\dfrac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}}-\dfrac{1}{(\ln N)^{\beta-1}}\right)\underset{N\to+\infty}{\sim}-\dfrac{1}{\beta-1}\dfrac{1}{(\ln N)^{\beta-1}} & \text{si } \beta<1\\ \ln\Big(\ln(N)\Big)-\ln\Big(\ln(2)\Big)\underset{N\to+\infty}{\sim}\ln\Big(\ln(N)\Big) & \text{si } \beta=1\end{cases}$$

donc

$$\boxed{\mathrm{S}_N\underset{N\to+\infty}{\sim}\begin{cases}\dfrac{1}{1-\beta}\dfrac{1}{(\ln N)^{\beta-1}} & \text{si } \beta<1\\ \ln(\ln N) & \text{si } \beta=1.\end{cases}}$$

Problème III

Étude d'un procédé de sommation

Partie A Cas d'une suite constante

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Expliciter $\widetilde{c}_n$.

On a $\widetilde{c}_n = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha = \dfrac{\alpha}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \dfrac{\alpha}{2^n}(1+1)^n = \alpha$ donc $\boxed{\widetilde{c}_n = \alpha.}$

2. Les séries $\displaystyle\sum_n c_n$ et $\displaystyle\sum_n \widetilde{c}_n$ sont-elles convergentes ?

Puisque $\alpha \neq 0$, $c_n, \widetilde{c}_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$ donc $\boxed{\text{les séries } \sum c_n \text{ et } \sum \widetilde{c}_n \text{ ne sont pas convergentes.}}$

Partie B Cas d'une suite géométrique

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Expliciter $\widetilde{g}_n$ en fonction de n et z.

Puisque $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k = (z+1)^n$, on a $\boxed{\widetilde{g}_n = \dfrac{(z+1)^n}{2^n}.}$

4. On suppose que $|z| < 1$.

(a) Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_n g_n$ et expliciter sa somme S_∞^g.

Pour $N \in \mathbb{N}$, on a, puisque $z \neq 1$, $S_N^g = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} z^k = \dfrac{1-z^{N+1}}{1-z}$.

Comme $|z| < 1$, $S_N^g \xrightarrow[N\to+\infty]{} \dfrac{1}{1-z}$ donc $\boxed{\displaystyle\sum_n g_n \text{ converge et } S_\infty^g = \dfrac{1}{1-z}.}$

(b) Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_n \widetilde{g}_n$ et expliciter sa somme T_∞^g en fonction de S_∞^g.

► La série $\displaystyle\sum_n \widetilde{g}_n$ est géométrique de raison $\dfrac{z+1}{2}$ et, par inégalité triangulaire,

$$\left|\frac{z+1}{2}\right| \leqslant \frac{|z|+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$$

donc $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_n \widetilde{g}_n \text{ converge.}}$

▶ Comme somme d'une série géométrique de raison $\dfrac{z+1}{2}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \widetilde{g}_n = \frac{1}{1-\frac{z+1}{2}} = \frac{2}{2-z-1} = 2 \times \frac{1}{1-z}$$

donc $\boxed{\mathrm{T}^g_\infty = 2\mathrm{S}^g_\infty.}$

5. On suppose que $|z| \geqslant 1$. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_n g_n$?

D'après les résultats sur les séries géométriques, $\boxed{\sum\limits_n g_n \text{ diverge grossièrement.}}$

6. On suppose que $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[\setminus \{0\}$.

Montrer que la série $\sum\limits_n \widetilde{g}_n$ est convergente, puis calculer la partie réelle et la partie imaginaire de la somme T^g_∞.

▶ La suite $(\widetilde{g}_n)_n$ est géométrique de raison

$$\frac{z+1}{2} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+1}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

et $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right| = \left|\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right| < 1$ car $\dfrac{\theta}{2} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$ donc $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \in \left]0, 1\right[$.

▶ On a, d'après les formules d'Euler,

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}^g_\infty &= \frac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}} \frac{1}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}}{2} \frac{\mathrm{i}}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2} \frac{\mathrm{i}}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{i}\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{i}\frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right).
\end{aligned}$$

▶ En appliquant la question **4.(b)**, $\mathrm{T}^g_\infty = 1 + \mathrm{i}\dfrac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ donc

$$\boxed{\mathfrak{Re}(\mathrm{T}^g_\infty) = 1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{Im}(\mathrm{T}^g_\infty) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}.}$$

Partie C Comparaison des convergences des deux suites

7. Déterminer la limite de $\mathrm{S}_q(n, a)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

- On a $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$.
- Par croissances comparées, $\displaystyle\frac{1}{2^n}\binom{n}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Soit $n > q$. On a, pour $k \in [\![0, q]\!]$, $\displaystyle\underbrace{\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0} a_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Par somme finie de limites, $\boxed{\mathrm{S}_q(n, a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$

8. On suppose que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que $\widetilde{a}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

- Soit $\varepsilon > 0$.
- Comme $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, fixons $N_{\varepsilon,1} \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N_{\varepsilon,1}$, $|a_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
- Aussi, comme $\mathrm{S}_q(n, a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, fixons $N_{\varepsilon,2} \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N_{\varepsilon,2}$, $\left|\mathrm{S}_q(n, a)\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
- Posons $N_\varepsilon := \max(N_{\varepsilon,1}, N_{\varepsilon,2}) + 1$.
- On a, pour $n \geqslant N_\varepsilon$,

$$|\widetilde{a}_n| = \left|\mathrm{S}_{N_\varepsilon}(n, a) + \frac{1}{2^n}\sum_{k=N_\varepsilon+1}^{n}\binom{n}{k}a_k\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^n}\sum_{k=N_\varepsilon+1}^{n}\binom{n}{k}\frac{\varepsilon}{2}$$

or $\displaystyle\sum_{k=N_\varepsilon+1}^{n}\binom{n}{k} \leqslant \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ donc

$$|\widetilde{a}_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

- Ainsi, par définition de la limite, on a $\boxed{\widetilde{a}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$

9. Soit $\ell \in \mathbb{C}$. On suppose que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Déterminer la limite de $(\widetilde{a}_n)_n$.

► Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n := a_n - \ell$, de sorte que $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

► En appliquant la question **8.** à la suite $(b_n)_n$, on a $\widetilde{b}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

► Or, pour $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{b}_n = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_k - \ell) = \dfrac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k - \ell = \widetilde{a}_n - \ell$.

► D'où $\boxed{\widetilde{a}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.}$

10. La convergence de la suite $(a_n)_n$ est-elle équivalente à celle de la suite $(\widetilde{a}_n)_n$?

Si $(a_n)_n$ est la suite géométrique $\Big((-2)^n\Big)_n$, on a $(a_n)_n$ diverge mais $(\widetilde{a}_n)_n$ converge.

Donc $\boxed{\text{la convergence de } (a_n)_n \text{ n'est pas équivalente à celle de } (\widetilde{a}_n)_n.}$

Partie D Comparaison des convergences des deux séries

11. On se propose de déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression explicite de U_n^a comme combinaison linéaire des sommes S_k^a pour $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\mathrm{U}_n^a = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}\mathrm{S}_k^a. \qquad (\star)$$

(a) Pour $n \in [\![0, 3]\!]$, déterminer les $(n+1)$-uplets $(\lambda_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant n}$.

On a

$$\begin{array}{lclcl}
\mathrm{U}_0^a &=& a_0 &=& \mathrm{S}_0^a,\\
\mathrm{U}_1^a &=& 3a_0 + a_1 &=& 2\mathrm{S}_0^a + \mathrm{S}_1^a,\\
\mathrm{U}_2^a &=& 7a_0 + 4a_1 + a_2 &=& 3\mathrm{S}_0^a + 3\mathrm{S}_1^a + \mathrm{S}_2^a,\\
\mathrm{U}_3^a &=& 15a_0 + 11a_1 + 5a_2 + a_3 &=& 4\mathrm{S}_0^a + 6\mathrm{S}_1^a + 4\mathrm{S}_2^a + \mathrm{S}_3^a.
\end{array}$$

d'où

$$\boxed{\begin{array}{ll}
\lambda_{0,0} = 1, & (\lambda_{2,0}, \lambda_{2,1}, \lambda_{2,2}) = (3, 3, 1),\\
(\lambda_{1,0}, \lambda_{1,1}) = (2, 1), & (\lambda_{3,0}, \lambda_{3,1}, \lambda_{3,2}, \lambda_{3,3}) = (4, 6, 4, 1).
\end{array}}$$

(b) À quelle expression des coefficients $\lambda_{n,k}$ (en fonction de n et k) peut-on s'attendre compte tenu des résultats obtenus à la question **11.(a)** ?

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$, on peut conjecturer que $\boxed{\lambda_{n,k} = \binom{n+1}{k+1}}$.

(c) Établir la formule $(\star)$ par récurrence sur l'entier n.

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, l'assertion $\mathscr{P}(n)$: « $\mathrm{U}_n^a = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} \mathrm{S}_k^a$ ».

<u>INITIALISATION.</u>

D'après **11.(a)**, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

<u>HÉRÉDITÉ.</u>

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{U}_{n+1}^a = 2^{n+1}\mathrm{T}_{n+1}^a = 2^{n+1}\sum_{k=0}^{n+1} \widetilde{a}_k = 2^{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} \widetilde{a}_k + \widetilde{a}_{n+1}\right) \\
= 2^{n+1}(\mathrm{T}_n^a + \widetilde{a}_{n+1}) = 2^{n+1}\frac{\mathrm{U}_n^a}{2^n} + 2^{n+1}\widetilde{a}_{n+1} \\
= 2\mathrm{U}_n^a + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_k.
\end{aligned}$$

Or (*cet enchaînement de calculs est classique et à savoir mener*)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_k &= a_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (\mathrm{S}_k^a - \mathrm{S}_{k-1}^a) \\
&= \underbrace{a_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \mathrm{S}_k^a}_{=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\mathrm{S}_k^a + \mathrm{S}_n^a} - \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \mathrm{S}_{k-1}^a \\
&= \mathrm{S}_{n+1}^a + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \mathrm{S}_k^a - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} \mathrm{S}_k^a \\
&= \mathrm{S}_{n+1}^a + \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1}\right] \mathrm{S}_k^a.
\end{aligned}$$

On a donc, par $\mathscr{P}(n)$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{U}_{n+1}^a &= \sum_{k=0}^{n} \left[2\binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1}\right] \mathrm{S}_k^a + \mathrm{S}_{n+1}^a \\
&= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\left[\binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k}\right]}_{=\binom{n+2}{k+1}} \mathrm{S}_k^a + \mathrm{S}_{n+1}^a = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+2}{k+1} \mathrm{S}_k^a,
\end{aligned}$$

d'où $\mathscr{P}(n+1)$.

<u>CONCLUSION.</u>

Par récurrence, on a bien montré $(\star)$.

12. On suppose que la série $\sum_n a_n$ est convergente et a pour somme S_∞^a.

Montrer que la série $\sum_n \widetilde{a}_n$ est convergente et exprimer sa somme T_∞^a en fonction de S_∞^a.

▶ On a, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{T}_n^a = \dfrac{\mathrm{U}_n^a}{2^n} = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\mathrm{S}_k^a$.

▶ D'après la question **9.** appliquée à la suite $(\mathrm{S}_n^a)_n$, on a

$$\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k+1}\mathrm{S}_k^a \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{S}_\infty^a$$

donc $\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k+1}\mathrm{S}_k^a \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\mathrm{S}_\infty^a$.

▶ Ainsi, $\boxed{\sum_n \widetilde{a}_n \text{ converge et a pour somme } \mathrm{T}_\infty^a = 2\mathrm{S}_\infty^a.}$

13. La convergence de la série $\sum_n a_n$ est-elle équivalente à celle de la série $\sum_n \widetilde{a}_n$?

▶ Si $a = \big((-2)^n\big)_n$, on a $\sum_n a_n$ diverge mais la série $\sum_n \widetilde{a}_n$ converge car

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \widetilde{a}_n = \frac{(-1)^n}{2^n},$$

donc $\sum_n \widetilde{a}_n$ est la série géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$ avec $\left|-\dfrac{1}{2}\right| < 1$.

▶ Donc $\boxed{\text{la convergence de } \sum_n a_n \text{ n'est pas équivalente à celle de } \sum_n \widetilde{a}_n.}$

Problème IV

Fonction génératrice d'une variable aléatoire

Partie A Propriétés et exemples

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$.

(a) Montrer que G_X est une fonction polynomiale et préciser son degré.

On pourra remarquer que, pour $t \in \mathbb{R}$, t^X est une variable aléatoire.

▶ Soit $t \in \mathbb{R}$.

▶ On applique la formule de transfert à la variable aléatoire X et la fonction $f : u \longmapsto t^u$ pour calculer l'espérance de la variable aléatoire t^X. On a

$$\mathbb{E}\left[t^X\right] = \mathbb{E}\left[f(X)\right] = \sum_{k=0}^{n} f(k)\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} t^k \mathbb{P}(X = k).$$

▶ Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } \mathrm{G}_X \text{ est une fonction polynomiale de degré } n.}$

(b) Déterminer $\mathrm{G}_X(0)$ et $\mathrm{G}_X(1)$.

▶ On a $\mathrm{G}_X(0) = \sum_{k=0}^{n} 0^k \mathbb{P}(X = k) = 0^0 \mathbb{P}(X = 0) + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{0^k}_{=0} \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = 0)$ donc

$$\boxed{\mathrm{G}_X(0) = \mathbb{P}(X = 0).}$$

▶ On a $\mathrm{G}_X(1) = \mathbb{E}\left[1^X\right] = \mathbb{E}[1] = 1$ donc $\boxed{\mathrm{G}_X(1) = 1.}$

On remarque que 1 *est un point fixe de* G_X.

(c) Pour $k \in [\![0, n]\!]$, déterminer une relation entre $\mathbb{P}(X = k)$ et ${\mathrm{G}_X}^{(k)}(0)$.

D'après la formule de Taylor polynomiale appliquée à G_X, on a

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], \quad {\mathrm{G}_X}^{(k)}(0) = k! \times \mathbb{P}(X = k).}$$

On peut aussi raisonner par récurrence pour établir que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad {\mathrm{G}_X}^{(k)}(t) = \sum_{j=k}^{n} \frac{j!}{(k - j)!} \mathbb{P}(X = j) t^{j-k}.$$

2. La fonction génératrice caractérise la loi.

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![0,n]\!]$.

Montrer que
$$X \text{ et } Y \text{ ont la même loi} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{G}_X = \mathrm{G}_Y.$$

L'implication $\boxed{\Rightarrow}$ est immédiate.

Démontrons désormais l'implication $\boxed{\Leftarrow}$.

▶ Supposons que $\mathrm{G}_X = \mathrm{G}_Y$.

▶ Alors on a
$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad {\mathrm{G}_X}^{(k)}(0) = {\mathrm{G}_Y}^{(k)}(0).$$

▶ D'après la question **1.(c)**, on a donc
$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k),$$
donc X et Y, à valeurs dans $[\![0,n]\!]$, suivent la même loi.

3. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$. Calculer G_U.

La variable aléatoire U est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ et, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}(U = k) = \dfrac{1}{n+1}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $\mathrm{G}_U(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} t^k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} t^k$.

Or, pour $t \neq 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1 - t^{n+1}}{1-t}$.

Ainsi, on a
$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{G}_U(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} t^k = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} \dfrac{1-t^{n+1}}{1-t} & \text{si} \quad t \neq 1 \\ 1 & \text{si} \quad t = 1. \end{cases}}$$

4. Soit B une variable aléatoire de loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ où $p \in [0,1]$. Calculer G_B.

La variable aléatoire B est à valeurs dans $\{0,1\}$ et on a
$$\mathbb{P}(B = 0) = 1 - p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B = 1) = p.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $\mathrm{G}_B(t) = (1-p)t^0 + pt^1$.

Ainsi, on a
$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{G}_B(t) = 1 - p + pt.}$$

5. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

(a) Soient X et Y des variables aléatoires à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ indépendantes.

Montrer que $\mathrm{G}_{X+Y} = \mathrm{G}_X \times \mathrm{G}_Y$.

<u>MÉTHODE 1</u>

▶ Soit $t \in \mathbb{R}$.

▶ Par indépendance de X et Y, les variables aléatoires t^X et t^Y sont indépendantes.

▶ On a donc $\mathrm{G}_{X+Y}(t) = \mathbb{E}\left[t^{X+Y}\right] = \mathbb{E}\left[t^X t^Y\right] = \mathbb{E}\left[t^X\right]\mathbb{E}\left[t^Y\right] = \mathrm{G}_X(t)\mathrm{G}_Y(t)$.

▶ Ceci étant valable pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a bien $\boxed{\mathrm{G}_{X+Y} = \mathrm{G}_X \times \mathrm{G}_Y.}$

<u>MÉTHODE 2</u>

▶ La variable aléatoire $X + Y$ est à valeurs dans $[\![0, 2n]\!]$.

▶ Par définition, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{G}_{X+Y}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}(X + Y = k)t^k$.

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, d'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(Y = j)_{j\in[\![0,n]\!]}$, on a

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(X + Y = k, Y = j) = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(X = k - j, Y = j)$$

or X et Y sont indépendantes donc

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{j=0}^{n} \underbrace{\mathbb{P}(X = k - j)}_{=0 \text{ si } j>k}\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X = k - j)\mathbb{P}(Y = j).$$

Cela donne donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{G}_{X+Y}(t) = \sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X = k - j)\mathbb{P}(Y = j)t^k. \qquad (\star_1)$$

▶ Comme G_X et G_Y sont des fonctions polynomiales, le produit $\mathrm{G}_X \times \mathrm{G}_Y$ est une fonction polynomiale de degré $2n$ et, pour $k \in [\![0, 2n]\!]$, son coefficient de degré k est $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X = k - j)\mathbb{P}(Y = j)$ donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{G}_X(t)\mathrm{G}_Y(t) = \sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X = k - j)\mathbb{P}(Y = j)t^k. \qquad (\star_2)$$

▶ D'après $(\star_1)$ et $(\star_2)$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{G}_{X+Y}(t) = \mathrm{G}_X(t)\mathrm{G}_Y(t)$.

▶ D'où $\boxed{\mathrm{G}_{X+Y} = \mathrm{G}_X \times \mathrm{G}_Y.}$

(b) Soit $p \in [0,1]$. Déterminer, à l'aide de ce qui précède, la fonction génératrice d'une variable aléatoire de loi binomiale $\mathscr{B}(N,p)$.

▶ On note, pour $p \geqslant 2$, $\mathscr{P}(p)$: « pour toutes variables aléatoires X_1, ..., X_p à valeurs dans $[\![0,n]\!]$, on a $\mathrm{G}_{X_1+\cdots+X_p} = \mathrm{G}_{X_1} \times \cdots \times \mathrm{G}_{X_p}$ ».

Raisonnons par récurrence pour démontrer $\mathscr{P}(p)$ pour tout $p \geqslant 2$.

INITIALISATION.

D'après la question **5.(a)**, $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

HÉRÉDITÉ.

Soit $p \geqslant 2$. Soient X_1, ..., X_{p+1} des variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $[\![0,n]\!]$. On a, d'après $\mathscr{P}(2)$,

$$\mathrm{G}_{X_1+\cdots+X_p+X_{p+1}} = \mathrm{G}_{X_1+\cdots+X_p} \times \mathrm{G}_{X_{p+1}},$$

or, d'après $\mathscr{P}(p)$, $\mathrm{G}_{X_1+\cdots+X_p} = \mathrm{G}_{X_1} \times \cdots \times \mathrm{G}_{X_p}$, d'où

$$\mathrm{G}_{X_1+\cdots+X_p+X_{p+1}} = \mathrm{G}_{X_1} \times \cdots \times \mathrm{G}_{X_p} \times \mathrm{G}_{X_{p+1}},$$

d'où $\mathscr{P}(p+1)$.

CONCLUSION.

D'où le résultat par récurrence.

▶ Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathscr{B}(N,p)$.

▶ Fixons $X_1, \ldots, X_N$ N variables aléatoires telles que

$$\begin{cases} X_1, \ldots, X_N \text{ sont indépendantes} \\ \forall k \in [\![1,N]\!], \quad X_k \sim \mathscr{B}(p) \\ X = X_1 + \cdots + X_N. \end{cases}$$

▶ D'après ce qui précède, on a $\mathrm{G}_X = \displaystyle\prod_{k=1}^{N} \mathrm{G}_{X_k}$.

▶ Or, pour tout $k \in [\![1,N]\!]$, d'après la question **4.**, on a $\mathrm{G}_{X_k} = 1 - p + pt$.

▶ Ainsi, on a

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{G}_X(t) = (1-p+pt)^N.}$$

Partie B Quelques applications

Les questions de cette partie sont indépendantes.

6. Une détermination de loi.

Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac. On note S_n la somme des numéros tirés.

Déterminer la loi de la variable aléatoire S_n à l'aide de sa fonction génératrice.

▶ Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au numéro tiré au $i^{\text{ème}}$ tirage, de sorte que $\mathsf{S}_n = X_1 + \cdots + X_n$.

▶ Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Déterminons la loi de X_i et sa fonction génératrice G_{X_i}.

▷ On a $X_i(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

▷ Les données de l'énoncé permettent de donner les valeurs

$$\mathbb{P}(X_i = 0) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_i = 2) = \frac{1}{4}.$$

▷ On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathsf{G}_{X_i}(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 = \frac{(t+1)^2}{4}.$$

▶ Comme les X_i pour $i \in [\![1, n]\!]$ sont indépendantes et que $\mathsf{S}_n = X_1 + \cdots + X_n$, d'après la récurrence de la question **5.(b)**, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathsf{G}_{\mathsf{S}_n}(t) = \left(\frac{(t+1)^2}{4}\right)^n = \left(\frac{t+1}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t\right)^{2n}.$$

▶ Or, d'après la question **5.(b)**, la fonction génératrice d'une loi binomiale $\mathscr{B}\left(2n, \dfrac{1}{2}\right)$ est

$$t \longmapsto \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t\right)^{2n}$$

▶ D'après la question **2.**, on a $\boxed{\mathsf{S}_n \sim \mathscr{B}\left(2n, \dfrac{1}{2}\right).}$

7. Moments d'ordre 1 et 2 d'une variable aléatoire.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$.

(a) Calculer ${\mathrm{G}_X}'(1)$. Que remarque-t-on ?

En tant que fonction polynomiale, G_X est dérivable. On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad {\mathrm{G}_X}'(t) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k)t^{k-1},$$

donc ${\mathrm{G}_X}'(1) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k)$ d'où

$$\boxed{{\mathrm{G}_X}'(1) = \mathbb{E}[X].}$$

(b) Exprimer de même $\mathbb{V}[X]$ à l'aide de ${\mathrm{G}_X}'(1)$ et ${\mathrm{G}_X}''(1)$.

▶ Toujours en tant que fonction polynomiale, G_X est deux fois dérivable et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad {\mathrm{G}_X}''(t) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\mathbb{P}(X = k)t^{k-2},$$

donc ${\mathrm{G}_X}''(1) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\mathbb{P}(X = k)$.

▶ D'après la formule de transfert, $\mathbb{E}\left[X^2\right] = \sum_{k=0}^{n} k^2\mathbb{P}(X = k)$ mais, comme pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $k^2 = k(k-1) + k$, on a, d'après ce qui précède et la question **7.(a)**,

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\mathbb{P}(X = k) + \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = {\mathrm{G}_X}''(1) + {\mathrm{G}_X}'(1).$$

▶ D'après la formule de König-Huygens, $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$ donc

$$\boxed{\mathbb{V}[X] = {\mathrm{G}_X}''(1) + {\mathrm{G}_X}'(1) - \left({\mathrm{G}_X}'(1)\right)^2.}$$

(c) Vérifier ces résultats pour X suivant une loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

▶ Soit X suivant une loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

▶ On sait que $\mathbb{E}[X] = \dfrac{n}{2}$ et $\mathbb{V}[X] = \dfrac{(n+1)^2 - 1}{12} = \dfrac{n(n+2)}{12}$.

▶ D'après la question **3.**, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{G}_X{}'(t) = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k t^{k-1}$, donc

$$\mathrm{G}_X{}'(1) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{n+1} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2} = \mathbb{E}[X].$$

▶ De même, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{G}_X{}''(t) = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1) t^{k-2}$, donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}_X{}''(1) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} k(k-1) = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} k^2 - \sum_{k=0}^{n} k \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{2n+1-3}{6} n = \frac{n(n-1)}{3},
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}_X{}''(1) + \mathrm{G}_X{}'(1) - \left(\mathrm{G}_X{}'(1)\right)^2 &= \frac{n^2 - n}{3} + \frac{n}{2} - \frac{n^2}{4} \\
&= \frac{4n^2 - 4n + 6n - 3n^2}{12} \\
&= \frac{n^2 + 2n}{12} = \frac{n(n+2)}{12} = \mathbb{V}[X].
\end{aligned}$$

(d) Vérifier ces résultats pour X suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ où $p \in [0, 1]$.

▶ Soit $p \in [0, 1]$. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

▶ On sait que $\mathbb{E}[X] = np$ et $\mathbb{V}[X] = np(1-p)$.

▶ D'après la question **5.(b)**, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \mathrm{G}_X{}'(t) = np(1 - p + pt)^{n-1} \\ \mathrm{G}_X{}''(t) = n(n-1)p^2(1 - p + pt)^{n-2}. \end{cases}$$

▶ On a donc

$$\begin{gathered}
\mathrm{G}_X{}'(1) = np = \mathbb{E}[X] \\
\mathrm{G}_X{}''(1) + \mathrm{G}_X{}'(1) - \left(\mathrm{G}_X{}'(1)\right)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p) = \mathbb{V}[X].
\end{gathered}$$

8. Une convergence en loi.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(p_N)_{N\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ telle que $Np_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \lambda$.

Soit $(X_N)_{N\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telle que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad X_N \sim \mathscr{B}(N, p_N).$$

Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{G}_{X_N}(t) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}.$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$.
- D'après **5.(b)**, on a

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{G}_{X_N}(t) = (1 - p_N + p_N t)^N = \exp\Big(N \ln\big(1 + p_N(t-1)\big)\Big).$$

- Comme $Np_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \lambda$, on a $p_N = \dfrac{\lambda}{N} + \underset{N\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{N}\right)$ donc $p_N(t-1) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ et

$$\begin{aligned} N\ln\big(1 + p_N(t-1)\big) &= N\left(\frac{\lambda}{N}(t-1) + \underset{N\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{N}\right)\right) \\ &= \lambda(t-1) + \underset{N\to+\infty}{o}(1) \end{aligned}$$

donc $N\ln\big(1 + p_N(t-1)\big) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \lambda(t-1)$.

- Par continuité de l'exponentielle, on a donc $\mathrm{G}_{X_N}(t) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$.
- $\boxed{\text{D'où le résultat.}}$

La fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$ est la fonction génératrice d'une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ. Cette loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$, sera étudiée en deuxième année.

9. Un lemme pour l'étude des processus de Galton-Watson.

Soit $(X_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi.

Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, indépendante des X_j pour $j \in \mathbb{N}^*$.

On pose $\mathsf{S}_0 \coloneqq 0$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathsf{S}_k \coloneqq \sum_{j=1}^{k} X_j$.

(a) Montrer que $\mathsf{G}_{\mathsf{S}_N} = \mathsf{G}_N \circ \mathsf{G}_{X_1}$.

▶ Remarquons tout d'abord que, puisque les X_j pour $j \in \mathbb{N}^*$ et N sont indépendantes, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, S_k et N sont indépendantes.

▶ Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\mathsf{G}_{\mathsf{S}_N}(t) = \mathbb{E}\Big[t^{\mathsf{S}_N}\Big] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n} t^{\mathsf{S}_k} \mathbb{1}_{N=k}\right],$$

d'où, par linéarité de l'espérance,

$$\mathsf{G}_{\mathsf{S}_N}(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\Big[t^{\mathsf{S}_k} \mathbb{1}_{N=k}\Big],$$

or, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, S_k et N sont indépendantes, donc t^{S_k} et $\mathbb{1}_{N=k}$ sont indépendantes, d'où

$$\mathsf{G}_{\mathsf{S}_N}(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\Big[t^{\mathsf{S}_k}\Big]\mathbb{E}[\mathbb{1}_{N=k}] = \sum_{k=0}^{n} \mathsf{G}_{\mathsf{S}_k}(t)\mathbb{P}(N = k),$$

or, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathsf{G}_{\mathsf{S}_k} = {\mathsf{G}_{X_1}}^k$ d'après **5.(b)** donc

$$\mathsf{G}_{\mathsf{S}_N}(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathsf{G}_{X_1}(t)^k \mathbb{P}(N = k) = \mathsf{G}_N\Big(\mathsf{G}_{X_1}(t)\Big).$$

▶ Ainsi, on a $\boxed{\mathsf{G}_{\mathsf{S}_N} = \mathsf{G}_N \circ \mathsf{G}_{X_1}.}$

(b) Calculer $\mathbb{E}[\mathsf{S}_N]$.

▶ D'après la question **7.(a)**, $\mathbb{E}[\mathsf{S}_N] = {\mathsf{G}_{\mathsf{S}_N}}'(1)$.

▶ Or on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, ${\mathsf{G}_{\mathsf{S}_N}}'(t) = {\mathsf{G}_{X_1}}'(t){\mathsf{G}_N}'\Big(\mathsf{G}_{X_1}(t)\Big)$.

▶ Donc

$${\mathsf{G}_{\mathsf{S}_N}}'(1) = \underbrace{{\mathsf{G}_{X_1}}'(1)}_{=\mathbb{E}[X_1]} {\mathsf{G}_N}'\Big(\underbrace{\mathsf{G}_{X_1}(1)}_{=1}\Big) = \mathbb{E}[X_1] \underbrace{{\mathsf{G}_N}'(1)}_{=\mathbb{E}[N]}.$$

▶ Ainsi, on a $\boxed{\mathbb{E}[\mathsf{S}_N] = \mathbb{E}[N] \times \mathbb{E}[X_1].}$