Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025

samedi 10 mai 2025

Mathématiques

DS 7 (4 heures)

Le sujet

- Ce sujet est composé de plusieurs exercices et problèmes indépendants.
- Vous pouvez les traiter dans l'ordre de votre choix, en indiquant clairement les références.

La rédaction

- Tout résultat ou raisonnement doit être clairement justifié, sauf mention du contraire.
- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'évaluation.
- La présentation de la copie sera prise en compte dans l'évaluation :
  - ◊ encadrez les résultats principaux ;
  - ◊ soulignez les résultats et arguments intermédiaires importants ;
  - ◊ soignez votre écriture et votre orthographe ;
  - ◊ maintenez une marge dans vos copies, aérez vos copies ;
  - ◊ enfin, numérotez vos copies (et non vos pages).

Le déroulement de l'épreuve

- Les documents, calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.
- En particulier, les téléphones devront être éteints et rangés dans les sacs, ces derniers devant être fermés.
- Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie en expliquant les initiatives que vous avez été amené à prendre.
- Ne rendez pas le sujet avec vos copies.

Exercice I

Une équation différentielle

On considère l'équation différentielle suivante sur $]0, +\infty[$ *:*

$$t^2\,y'' + t\,y' - y = \frac{t^3}{(1+t^2)^2}. \tag{E$_1$}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre mais à coefficients non constants. L'objectif de cet exercice est de la résoudre.

1. Soit y une solution de (E_1) définie sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $t > 0$, on pose $z(t) \coloneqq t\,y(t)$.

(a) Montrer que z' est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle d'inconnue x :

$$t\,x' - x = \frac{t^3}{(1+t^2)^2}. \tag{E$_2$}$$

(b) Résoudre l'équation (E_2) et montrer que

$$\exists K \in \mathbb{R} : \quad \forall t > 0, \quad z'(t) = Kt - \frac{t}{2(1+t^2)}.$$

(c) En déduire l'expression de y.

On note $\alpha \coloneqq 1 + \dfrac{\ln(2)}{4}$ *et on admet que*

$$f : t \longmapsto \alpha t - \frac{\ln(1+t^2)}{4t},$$

est l'unique fonction définie sur $]0, +\infty[$ *telle que*

$$f \text{ vérifie } (\mathsf{E}_1), \quad f(1) = 1 \quad \text{et} \quad f'(1) = \frac{3 + 2\ln(2)}{4}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ *la représentation graphique de* f *sur* $]0, +\infty[$.

2. À l'aide d'un développement limité de f au voisinage de 0, déterminer l'allure de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 0^+.

Exercice II

Autour des séries de Bertrand

- *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Soit* $\beta > 0$.
- *On considère la fonction* f : $\left| \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}} \end{array} \right.$.
- *On pose, pour* $N \geqslant 2$, $\mathrm{S}_N := \displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$.
- *Lorsque cela a un sens, on pose également, pour* $N \geqslant 2$, $\mathrm{R}_N := \displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$.
- *Le symbole* $\mathcal{O}$ *désigne le « grand O » des notations de Landau.*

1. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$

(a) dans le cas où $\alpha > 1$;

(b) dans le cas où $\alpha < 1$.

Dans toute la suite de l'exercice, on se place dans le cas où $\alpha = 1$.

2. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \geqslant 2$ et $m > n$.

Montrer soigneusement que

$$\int_n^m f(t)\,\mathrm{d}t + f(m) \leqslant \sum_{k=n}^{m} f(k) \leqslant f(n) + \int_n^m f(t)\,\mathrm{d}t.$$

3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur β pour que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$ converge.

4. On se place dans le cas où $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$ converge.

(a) Montrer que

$$\mathrm{R}_N = \frac{1}{\beta - 1} \frac{1}{(\ln N)^{\beta - 1}} + \underset{N \to +\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{N(\ln N)^{\beta}} \right).$$

(b) Donner un équivalent de R_N lorsque $N \to +\infty$.

5. On se place dans le cas où $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$ diverge.

Déterminer un équivalent de S_N lorsque $N \to +\infty$.

Problème III

Étude d'un procédé de sommation

Pour toute suite complexe $a = (a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,

- *on définit la suite $(\widetilde{a}_n)_n$ par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{a}_n = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k$;*
- *pour $n \in \mathbb{N}$, on note*

$$\mathrm{S}_n^a := \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_n^a := \sum_{k=0}^{n} \widetilde{a}_k.$$

- *en cas de convergence de la série $\sum_n a_n$ (resp. $\sum_n \widetilde{a}_n$), on note S_∞^a (resp. T_∞^a) sa somme.*

L'objet du problème est de comparer les propriétés de $\sum_n \widetilde{a}_n$ à celles de $\sum_n a_n$.

Partie A Cas d'une suite constante

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Soit $c = (c_n)_n$ la suite constante égale à α.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Expliciter $\widetilde{c}_n$.

2. Les séries $\sum_n c_n$ et $\sum_n \widetilde{c}_n$ sont-elles convergentes ?

Partie B Cas d'une suite géométrique

Soit $z \in \mathbb{C}$. Soit $g = (g_n)_n$ la suite géométrique de raison z.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Expliciter $\widetilde{g}_n$ en fonction de n et z.

4. On suppose que $|z| < 1$.

(a) Justifier la convergence de la série $\sum_n g_n$ et expliciter sa somme S_∞^g.

(b) Justifier la convergence de la série $\sum_n \widetilde{g}_n$ et expliciter sa somme T_∞^g en fonction de S_∞^g.

5. On suppose que $|z| \geqslant 1$. Quelle est la nature de la série $\sum_n g_n$?

6. On suppose que $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$.
Montrer que la série $\sum_n \widetilde{g}_n$ est convergente, puis calculer la partie réelle et la partie imaginaire de la somme T_∞^g.

Partie C Comparaison des convergences des deux suites

- *Soit* $a = (a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *une suite complexe.*
- *Si l'on fixe* $q \in \mathbb{N}$*, on considère, pour* $n > q$*, la somme* $\mathrm{S}_q(n, a) := \sum_{k=0}^{q} \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^n}$.

7. Déterminer la limite de $\mathrm{S}_q(n, a)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

8. On suppose que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que $\widetilde{a}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

9. Soit $\ell \in \mathbb{C}$. On suppose que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Déterminer la limite de $(\widetilde{a}_n)_n$.

10. La convergence de la suite $(a_n)_n$ est-elle équivalente à celle de la suite $(\widetilde{a}_n)_n$?

Partie D Comparaison des convergences des deux séries

- *Soit* $a = (a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *une suite complexe.*
- *Pour* $n \in \mathbb{N}$*, on note* $\mathrm{U}_n^a := 2^n \mathrm{T}_n^a$.

11. On se propose de déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression explicite de U_n^a comme combinaison linéaire des sommes S_k^a pour $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\mathrm{U}_n^a = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} \mathrm{S}_k^a. \qquad (\star)$$

(a) Pour $n \in [\![0, 3]\!]$, déterminer les $(n+1)$-uplets $(\lambda_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant n}$.

(b) À quelle expression des coefficients $\lambda_{n,k}$ (en fonction de n et k) peut-on s'attendre compte tenu des résultats obtenus à la question **11.(a)** ?

(c) Établir la formule $(\star)$ par récurrence sur l'entier n.

12. On suppose que la série $\sum_n a_n$ est convergente et a pour somme S_∞^a.

Montrer que la série $\sum_n \widetilde{a}_n$ est convergente et exprimer sa somme T_∞^a en fonction de S_∞^a.

13. La convergence de la série $\sum_n a_n$ est-elle équivalente à celle de la série $\sum_n \widetilde{a}_n$?

Problème IV

Fonction génératrice d'une variable aléatoire

- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*
- *On se place dans l'espace probabilisé $\big(\Omega, \mathbb{P}(\cdot)\big)$ d'une expérience aléatoire.*
- *L'espérance est notée $\mathbb{E}[\cdot]$ et la variance $\mathbb{V}[\cdot]$.*
- *Pour toute variable aléatoire X définie sur Ω et à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, on définit la* fonction génératrice de X

$$\mathrm{G}_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \mathbb{E}\left[t^X\right], \end{array} \right.$$

où, par convention, $0^0 = 1$.

Partie A Propriétés et exemples

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$.

(a) Montrer que G_X est une fonction polynomiale et préciser son degré.

On pourra remarquer que, pour $t \in \mathbb{R}$, t^X est une variable aléatoire.

(b) Déterminer $\mathrm{G}_X(0)$ et $\mathrm{G}_X(1)$.

(c) Pour $k \in [\![0, n]\!]$, déterminer une relation entre $\mathbb{P}(X = k)$ et ${\mathrm{G}_X}^{(k)}(0)$.

2. La fonction génératrice caractérise la loi.

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![0, n]\!]$.

Montrer que

$$X \text{ et } Y \text{ ont la même loi} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{G}_X = \mathrm{G}_Y.$$

3. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$. Calculer G_U.

4. Soit B une variable aléatoire de loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ où $p \in [0, 1]$. Calculer G_B.

5. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

(a) Soient X et Y des variables aléatoires à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ indépendantes.

Montrer que $\mathrm{G}_{X+Y} = \mathrm{G}_X \times \mathrm{G}_Y$.

(b) Soit $p \in [0, 1]$. Déterminer, à l'aide de ce qui précède, la fonction génératrice d'une variable aléatoire de loi binomiale $\mathscr{B}(N, p)$.

Partie B Quelques applications

Les questions de cette partie sont indépendantes.

6. Une détermination de loi.

Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac. On note S_n la somme des numéros tirés.

Déterminer la loi de la variable aléatoire S_n à l'aide de sa fonction génératrice.

7. Moments d'ordre 1 et 2 d'une variable aléatoire.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$.

(a) Calculer ${\mathrm{G}_X}'(1)$. Que remarque-t-on ?

(b) Exprimer de même $\mathbb{V}[X]$ à l'aide de ${\mathrm{G}_X}'(1)$ et ${\mathrm{G}_X}''(1)$.

(c) Vérifier ces résultats pour X suivant une loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

(d) Vérifier ces résultats pour X suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ où $p \in [0, 1]$.

8. Une convergence en loi.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(p_N)_{N\in\mathbb{N}} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ telle que $Np_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \lambda$.

Soit $(X_N)_{N\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telle que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad X_N \sim \mathscr{B}(N, p_N).$$

Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{G}_{X_N}(t) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}.$$

La fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$ est la fonction génératrice d'une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ. Cette loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$, sera étudiée en deuxième année.

9. Un lemme pour l'étude des processus de Galton-Watson.

Soit $(X_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi.

Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, indépendante des X_j pour $j \in \mathbb{N}^*$.

On pose $\mathrm{S}_0 \coloneqq 0$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}_k \coloneqq \displaystyle\sum_{j=1}^{k} X_j$.

(a) Montrer que $\mathrm{G}_{\mathrm{S}_N} = \mathrm{G}_N \circ \mathrm{G}_{X_1}$.

(b) Calculer $\mathbb{E}[\mathrm{S}_N]$.

► FIN DU SUJET ◄