William GREGORY

Colle 1 • INDICATIONS
Raisonnements

Exercice 1.1

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$\sqrt{2-x} = x.$$

indication

Élever au carré, résoudre l'équation polynomiale de degré 2 déterminée et déterminer la solution du problème par des considérations de signe.

résultat

$$x = 1.$$

Exercice 1.2

Soient $u, v > 0$.
Déterminer tous les couples $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$ tels que

$$\begin{cases} xy = u \\ \dfrac{x}{y} = v. \end{cases}$$

indication

- Raisonner par analyse-synthèse.
- Faire le produit des deux équations pour en déduire x^2 puis x (en pensant au signe).
- En déduire les y possibles.

résultat

Les couples solutions du système sont les éléments de

$$\left\{ \left(\sqrt{uv}, \frac{\sqrt{uv}}{v} \right), \left(-\sqrt{uv}, -\frac{\sqrt{uv}}{v} \right) \right\}.$$

Exercice 1.3

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

> *La fonction f est dite paire lorsque*
>
> $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = f(x).$$

Montrer que f est paire si, et seulement si, il existe une unique fonction $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x^2).$$

indication

- $\boxed{\Leftarrow}$ Se vérifie par calcul.
- $\boxed{\Rightarrow}$ Raisonner par analyse synthèse. Évaluer en $x = \sqrt{t}$ pour trouver g. La parité de f permet de vérifier que g répond bien au problème.

Exercice 1.4

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

indication

- Raisonner par analyse-synthèse.
- Évaluer en $(x, y) = (0, 0)$ pour obtenir les valeurs possibles de $f(0)$.
- Déterminer la seule valeur possible de $f(0)$ puis évaluer de nouveau l'équation en $y = 0$.

résultat

$$f : x \longmapsto 1 + x.$$

Exercice 1.5

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

indication

- Raisonner par analyse-synthèse.
- Évaluer en $(x, y) = (0, 0)$ pour obtenir $f(0)$.
- Fixer y et dériver la fonction en x puis évaluer en $x = 0$ pour obtenir $f'(y)$.
- En déduire f par intégration.

résultat

Les fonctions solutions sont les éléments de

$$\{x \longmapsto \lambda x \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 1.6

1. Déterminer les solutions r_1, r_2 de l'équation

$$x^2 + 5x - 14 = 0.$$

2. Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -5u_{n+1} + 14u_n.$$

Montrer que

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda {r_1}^n + \mu {r_2}^n.$$

indication

1. Méthode classique.

2. Raisonner par analyse-synthèse. Évaluer en $n = 0$ et $n = 1$ pour déterminer λ et μ puis, dans la synthèse, raisonner par récurrence à deux prédécesseurs.

résultat

$$r_1 = 2, \quad r_2 = -7.$$

Exercice 1.7

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a + b \notin \mathbb{Q}$.
Les nombres a et b peuvent-ils être rationnels ?

indication

Raisonner par l'absurde et écrire les définitions pour calculer $a + b$.

Exercice 1.8

Existe-t-il $x, y \notin \mathbb{Q}$ tels que $x^y \in \mathbb{Q}$?

indication

On pourra exploiter l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et/ou de $\dfrac{\ln(p)}{\ln(q)}$ avec p et q deux nombres premiers distincts.

Exercice 1.9

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que n est le carré d'un entier.
Le nombre $2n$ peut-il être le carré d'un entier ?

indication

- Si $n = 0$, oui.
- Si $n \neq 0$, raisonner par l'absurde et aboutir à une contradiction avec l'hypothèse de départ en utilisant que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 1.10

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Montrer que

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}.$$

indication

- Raisonner par récurrence.
- Dans chaque phase, on écrira l'inégalité que l'on souhaite établir et on la vérifiera par étude du signe de la différence.

Exercice 1.11

Soit $a \in [0,1]$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a^n \leqslant n! \leqslant n^n.$$

indication

- Montrer séparément les deux inégalités.
- Pour « $a^n \leqslant n!$ », raisonner par récurrence en utilisant que $(n+1)! = (n+1)n!$.
- Pour « $n! \leqslant n^n$ », utiliser la définition de la factorielle.

Exercice 1.12

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}. \end{cases}$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant u_n \leqslant 1.$$

indication

- Raisonner par récurrence.
- Pour l'hérédité, on établira les inégalités en faisant la différence, *i.e.* pour montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1,$$

  on calculera d'abord $u_{n+1} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $u_{n+1} - 1$.
- Pour calculer la différence de deux racines, on utilise « la méthode du conjugué », *i.e.*

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$