William GREGORY

Colle 2 • INDICATIONS

Raisonnements, ensembles, nombres complexes

Exercice 2.1

1. Calculer $\dfrac{\sqrt{2}+\mathrm{i}}{\sqrt{2}-\mathrm{i}}+\dfrac{\sqrt{2}-\mathrm{i}}{\sqrt{2}+\mathrm{i}}$.

2. Calculer $\dfrac{\sqrt{2}+\mathrm{i}}{\sqrt{2}-\mathrm{i}}-\dfrac{\sqrt{2}-\mathrm{i}}{\sqrt{2}+\mathrm{i}}$.

indication

Poser $z:=\dfrac{\sqrt{2}+\mathrm{i}}{\sqrt{2}-\mathrm{i}}$ et remarquer qu'il s'agit de calculer

$$z+\overline{z} \quad \text{et} \quad z-\overline{z}.$$

résultat

$$\frac{\sqrt{2}+\mathrm{i}}{\sqrt{2}-\mathrm{i}}+\frac{\sqrt{2}-\mathrm{i}}{\sqrt{2}+\mathrm{i}}=\frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{2}+\mathrm{i}}{\sqrt{2}-\mathrm{i}}-\frac{\sqrt{2}-\mathrm{i}}{\sqrt{2}+\mathrm{i}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}\mathrm{i}.$$

Exercice 2.2

On pose

$$\mathrm{j}:=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1. Calculer j^2, $\dfrac{1}{\mathrm{j}}$ et $\overline{\mathrm{j}}$.

2. Calculer j^3.

3. Calculer $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2$.

indication

On mettra j sous forme exponentielle.

résultat

$$\mathrm{j}^2=\frac{1}{\mathrm{j}}=\overline{\mathrm{j}}=-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\mathrm{j}^3=1, \qquad 1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2=0.$$

Exercice 2.3

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on définit $f(z) := \dfrac{\overline{z}}{z}$.

1. Déterminer

$$\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; f(z) \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R}\right\}.$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Déterminer $f(\overline{z})$.

indication

1. Utiliser la forme algébrique et procéder par identification partie réelle - partie imaginaire.

2. Utiliser les propriétés de la conjugaison.

résultat

1. En posant $x := \mathfrak{Re}(z)$ et $y := \mathfrak{Im}(z)$, on a

$$f(z) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \mathrm{i}\frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

$$\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; f(z) \in \mathbb{R}\right\} = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathfrak{Re}(z) = 0 \text{ ou } \mathfrak{Im}(z) = 0\right\}.$$

$$\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R}\right\} = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathfrak{Re}(z) = \pm\mathfrak{Im}(z)\right\}.$$

2. $f(\overline{z}) = \overline{f(z)} = \dfrac{1}{f(z)}$.

Exercice 2.4

À l'aide du nombre $z := \dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 + \mathrm{i}}$, déterminer

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

indication

On met z sous forme trigonométrique et sous forme algébrique, pour en déduire $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = \cdots$.

résultat

On obtient l'égalité

$$\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

D'où

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Exercice 2.5

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a + b \notin \mathbb{Q}$.
Les nombres a et b peuvent-ils être rationnels ?

indication

Raisonner par l'absurde et écrire les définitions pour calculer $a + b$.

Exercice 2.6

Soit $a \in [0, 1]$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a^n \leqslant n! \leqslant n^n.$$

indication

- Montrer séparément les deux inégalités.
- Pour « $a^n \leqslant n!$ », raisonner par récurrence en utilisant que $(n+1)! = (n+1)n!$.
- Pour « $n! \leqslant n^n$ », utiliser la définition de la factorielle.

Exercice 2.7

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}. \end{cases}$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant u_n \leqslant 1.$$

indication

- Raisonner par récurrence.
- Pour l'hérédité, on établira les inégalités en faisant la différence, *i.e.* pour montrer que
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1,$$
on calculera d'abord $u_{n+1} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $u_{n+1} - 1$.
- Pour calculer la différence de deux racines, on utilise « la méthode du conjugué », *i.e.*
$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Exercice 2.8

On note

$$A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \middle| \quad y \geqslant e^{-x}\right\},$$
$$B := \mathbb{R} \times \{0\}.$$

Décrire l'ensemble

$$A + B := \{a + b \quad ; \quad a \in A, b \in B\}.$$

indication

$\boxed{\subset}$ Se montre moins difficilement que la réciproque.

$\boxed{\supset}$ Une fois un élément $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ introduit, on détermine d'abord y_A et y_B (tels que $(x_A, y_A) \in A$ et $(x_B, y_B) \in B$), puis l'on construit x_A en admettant que tout nombre réel strictement positif « s'écrit comme une exponentielle ». On pose enfin x_B et on peut conclure.

résultat

$$\{a + b \quad ; \quad a \in A, b \in B\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*.$$

Exercice 2.9

Soit E un ensemble. Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$.
Résoudre dans $\mathscr{P}(E)$ l'équation

$$A \cap X = B.$$

indication

— Remarquer que, nécessairement, $B \subset A$.

— Dans le cas $B \subset A$, raisonner par analyse-synthèse, en décomposant X dans la partition $(A, \overline{A})$ pour exhiber un ensemble C.

résultat

$$\mathscr{S} = \left\{X = B \cup C \quad ; \quad C \in \mathscr{P}(\overline{A})\right\}.$$

Exercice 2.10

Montrer que

$$B := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \middle| \quad x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$$

ne s'écrit pas comme un produit cartésien de deux ensembles.

indication

Raisonner par l'absurde. Si B s'écrit comme un produit cartésien de deux ensembles, alors, avec les éléments $(1,0)$ et $(0,1)$, on montre que $(1,1)$ est un élément de B.