Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025
William GREGORY

Colle 3 • INDICATIONS
Raisonnements, Ensembles, Complexes, Sommes

Exercice 3.1

1. Déterminer la solution x_0 de l'équation

$$x^2 + 8x + 16 = 0.$$

2. Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -8u_{n+1} - 16u_n.$$

Montrer que

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda n + \mu){x_0}^n.$$

indication

1. Méthode classique.
2. Raisonner par analyse-synthèse. Évaluer en $n = 0$ et $n = 1$ pour déterminer λ et μ puis, dans la synthèse, raisonner par récurrence à deux prédécesseurs.

résultat

$$x_0 = -4.$$

Exercice 3.2

On note

$$A := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geqslant \mathrm{e}^{-x}\right\},$$
$$B := \mathbb{R} \times \{0\}.$$

Décrire l'ensemble

$$A + B := \{a + b \quad ; \quad a \in A, b \in B\}.$$

indication

$\boxed{\subset}$ Se montre moins difficilement que la réciproque.
$\boxed{\supset}$ Une fois un élément $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ introduit, on détermine d'abord y_A et y_B (tels que $(x_A, y_A) \in A$ et $(x_B, y_B) \in B$), puis l'on construit x_A en admettant que tout nombre réel strictement positif « s'écrit comme une exponentielle ». On pose enfin x_B et on peut conclure.

résultat

$$\{a + b \quad ; \quad a \in A, b \in B\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*.$$

Exercice 3.3

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On note

$$g(z) := \mathrm{i}\frac{z+1}{1-z}.$$

1. Calculer $\mathfrak{Im}\big(g(z)\big)$.

2. Que dire si $|z| < 1$?

résultat

$$\mathfrak{Im}\big(g(z)\big) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}.$$

Exercice 3.4

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\}$. On note

$$h(z) := \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}.$$

1. Calculer $1 - \big|h(z)\big|^2$ en fonction de $\mathfrak{Im}(z)$ et du module d'un nombre complexe.

2. Que dire si $\mathfrak{Im}(z) > 0$?

résultat

$$1 - \big|h(z)\big|^2 = 4\frac{\mathfrak{Im}(z)}{|z+\mathrm{i}|^2}.$$

Exercice 3.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

4. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

indication

On définit $f : x \longmapsto (1+x)^n$. On exploite $f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$ et $F(1)$ où F désigne une primitive (bien choisie) de f.

résultat

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n,\qquad \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}n2^{n-1},$$
$$\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}=n(n+1)2^{n-2},\qquad \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

Exercice 3.6

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer les sommes

$$\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}\quad\text{et}\quad\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}.$$

indication

Exprimer les sommes
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\quad\text{et}\quad\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$$
en fonction des deux sommes que l'on cherche à calculer.

résultat

$$\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}=2^{n-1}.$$

Exercice 3.7

Soit $a\in\mathbb{R}$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer
$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a^{i+j}.$$

résultat

- Si $a=1$, $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a^{i+j}=\frac{n(n+1)}{2}$.
- Si $a\neq 1$, $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a^{i+j}=\frac{a^2(1-a^n)(1-a^{n+1})}{(1-a)^2(1+a)}$.

Exercice 3.8 Lemme de Gronwall discret.

On admet la proposition suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant 1 + x.$$

Soit $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \theta_{n+1} \leqslant \theta_n + h_n\lambda\theta_n + \eta_n.$$

On pose

$$\begin{cases} t_0 := 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad t_n := \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} h_i. \end{cases}$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \theta_n \leqslant e^{\lambda t_n}\theta_0 + \sum_{i=0}^{n-1} e^{\lambda(t_n - t_{i+1})}\eta_i.$$

indication

- Raisonner par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
- Par la proposition admise, on a $1 + h_n\lambda \leqslant e^{h_n\lambda}$.
- Par définition de la suite $(t_n)_n$, on a $t_n + h_n = t_{n+1}$.

Exercice 3.9

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k.$$

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $(s_{p,n})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s_{p,k}.$$

Donner, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression de $s_{p,n}$.

résultat

$$s_{p,n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p.$$