William GREGORY

Colle 3

Raisonnements, Ensembles, Complexes, Sommes

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à me rendre la semaine prochaine.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Raisonnements, Ensembles

Exercice 3.1

1. Déterminer la solution x_0 de l'équation

$$x^2 + 8x + 16 = 0.$$

2. Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -8u_{n+1} - 16u_n.$$

Montrer que

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda n + \mu){x_0}^n.$$

Exercice 3.2

On note

$$A := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geqslant \mathrm{e}^{-x}\right\},$$
$$B := \mathbb{R} \times \{0\}.$$

Décrire l'ensemble

$$A + B := \{a + b \quad ; \quad a \in A, b \in B\}.$$

Nombres complexes

Exercice 3.3

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On note

$$g(z) := \mathrm{i}\frac{z+1}{1-z}.$$

1. Calculer $\mathfrak{Im}\big(g(z)\big)$.

2. Que dire si $|z| < 1$?

Exercice 3.4

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\}$. On note

$$h(z) := \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}.$$

1. Calculer $1 - \left|h(z)\right|^2$ en fonction de $\mathfrak{Im}(z)$ et du module d'un nombre complexe.

2. Que dire si $\mathfrak{Im}(z) > 0$?

Techniques algébriques

Exercice 3.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

4. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Exercice 3.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}.$$

Exercice 3.7

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a^{i+j}.$$

Exercice 3.8 Lemme de Gronwall discret.

> *On admet la proposition suivante :*
>
> $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x.$$

Soit $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \theta_{n+1} \leqslant \theta_n + h_n\lambda\theta_n + \eta_n.$$

On pose

$$\begin{cases} t_0 := 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad t_n := \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} h_i. \end{cases}$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \theta_n \leqslant \mathrm{e}^{\lambda t_n}\theta_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\lambda(t_n - t_{i+1})}\eta_i.$$

Exercice 3.9

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} b_k.$$

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $(s_{p,n})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s_{p,k}.$$

Donner, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression de $s_{p,n}$.