William GREGORY

Colle 4 • INDICATIONS

Techniques algébriques, Nombres complexes

Exercice 4.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \ln(i^j).$$

résultat

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \ln(i^j) = \frac{n(n+1)}{2} \ln(n!).$$

Exercice 4.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j}.$$

résultat

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j} = \frac{n(n+3)}{4}.$$

Exercice 4.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n \coloneqq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

1. Montrer que $S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

2. En admettant que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \ln(2),$$

calculer

$$\lim_{n \to +\infty} S_{2n} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} S_{2n+1}.$$

indication

1. Sommer sur les termes pairs et impairs, puis faire des décalages d'indices.
2. On a $S_{2n+1} = S_{2n} + \dfrac{1}{2n+1}$.

résultat

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \ln(2).$$

Exercice 4.4

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k.$$

2. Soit $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Exercice 4.5

Soient $p, q \in [1, +\infty[$ tels que $p \leqslant q$.
Soit $r \in [p, q]$.
Montrer que

$$\exists \theta \in [0,1] : \quad \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

indication

Raisonner par analyse-synthèse, en n'oubliant pas de vérifier que la solution trouvée est bien dans $[0,1]$.

Exercice 4.6

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

> *La fonction f est dite paire lorsque*
>
> $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = f(x).$$

Montrer que f est paire si, et seulement si, il existe une unique fonction $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x^2).$$

indication

$\boxed{\Leftarrow}$ Se vérifie par calcul.

$\boxed{\Rightarrow}$ Raisonner par analyse synthèse. Évaluer en $x = \sqrt{t}$ pour trouver g. La parité de f permet de vérifier que g répond bien au problème.

Exercice 4.7

Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{U}, \quad \frac{z+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}z} \in \mathbb{R}.$$

indication

Montrer que $\overline{\frac{z+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}z}} = \frac{z+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}z}$.

Exercice 4.8

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $|z|$ pour que

$$\frac{1+z}{1-z} \in \mathrm{i}\mathbb{R}.$$

indication

On a, pour $u \in \mathbb{C}$, $u \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff \overline{u} = -u$.

résultat

$$\frac{1+z}{1-z} \in \mathrm{i}\mathbb{R} \quad \iff \quad |z| = 1.$$

Exercice 4.9

Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que

$$|a| + |b| \leqslant |a+b| + |a-b|.$$

2. Étudier le cas d'égalité.

indication

1. Écrire $2a$ et $2b$ en fonction et $a+b$ et $a-b$, puis utiliser l'inégalité triangulaire.
2. Se ramener au cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire entre

$$a+b \text{ et } a-b \quad \text{et} \quad a+b \text{ et } b-a.$$

résultat

$$|a|+|b| \leqslant |a+b|+|a-b| \quad \Longleftrightarrow \quad a = \pm b.$$

Exercice 4.10

1. Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}.$$

Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

2. Montrer que

$$|a-b|^2 \leqslant \left(1+|a|^2\right)\left(1+|b|^2\right).$$

3. Étudier le cas d'égalité.

indication

1. Calculer $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2$.
2. L'inégalité triangulaire donne $|a-b|^2 \leqslant |a|^2+|b|^2+2|ab|$ et on utilise l'inégalité arithmético-géométrique pour obtenir

$$2|ab| \leqslant 1+|ab|^2,$$

et conclure.

3. Il suffit d'avoir égalité dans les deux majorations faites ci-dessus.

résultat

$$|a-b|^2 \leqslant \left(1+|a|^2\right)\left(1+|b|^2\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \theta \in \mathbb{R}, R \in \mathbb{R}_+^* : \quad a = Re^{i\theta} \text{ et } b = \frac{-1}{R}e^{i\theta}.$$