Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025

William GREGORY

Colle 4

Techniques algébriques, Nombres complexes

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à me rendre la semaine prochaine.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Techniques algébriques

Exercice 4.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \ln(i^j).$$

Exercice 4.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j}.$$

Exercice 4.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

1. Montrer que $S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

2. En admettant que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \ln(2),$$

calculer

$$\lim_{n \to +\infty} S_{2n} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} S_{2n+1}.$$

Exercice 4.4

1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k.$$

2. Soit $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Raisonnements par analyse-synthèse

Exercice 4.5

Soient $p, q \in [1, +\infty[$ tels que $p \leqslant q$.
Soit $r \in [p, q]$.
Montrer que

$$\exists \theta \in [0,1] : \quad \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

Exercice 4.6

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

> *La fonction f est dite paire lorsque*
>
> $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = f(x).$$

Montrer que f est paire si, et seulement si, il existe une unique fonction $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x^2).$$

Nombres complexes

Exercice 4.7

Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{U}, \quad \frac{z+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}z} \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.8

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $|z|$ pour que

$$\frac{1+z}{1-z} \in \mathrm{i}\mathbb{R}.$$

Exercice 4.9

Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que

$$|a| + |b| \leqslant |a+b| + |a-b|.$$

2. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 4.10

1. Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}.$$

Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

2. Montrer que

$$|a-b|^2 \leqslant \left(1+|a|^2\right)\left(1+|b|^2\right).$$

3. Étudier le cas d'égalité.