William GREGORY

Colle 5 • INDICATIONS
Nombres complexes

Exercice 5.1

Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que
$$|a| + |b| \leqslant |a+b| + |a-b|.$$

2. Étudier le cas d'égalité.

indication

1. Écrire $2a$ et $2b$ en fonction et $a+b$ et $a-b$, puis utiliser l'inégalité triangulaire.

2. Se ramener au cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire entre
$$a+b \text{ et } a-b \quad \text{et} \quad a+b \text{ et } b-a.$$

résultat

$$|a| + |b| \leqslant |a+b| + |a-b| \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = \pm b.$$

Exercice 5.2

Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que
$$|a-b|^2 \leqslant \left(1+|a|^2\right)\left(1+|b|^2\right).$$

2. Étudier le cas d'égalité.

indication

1. L'inégalité triangulaire donne $|a-b|^2 \leqslant |a|^2 + |b|^2 + 2|ab|$ et on utilise l'inégalité arithmético-géométrique pour obtenir
$$2|ab| \leqslant 1 + |ab|^2,$$
et conclure.

2. Il suffit d'avoir égalité dans les deux majorations faites ci-dessus.

résultat

$$|a-b|^2 \leqslant \left(1+|a|^2\right)\left(1+|b|^2\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \theta \in \mathbb{R}, R \in \mathbb{R}_+^* : \quad a = Re^{i\theta} \text{ et } b = \frac{-1}{R}e^{i\theta}.$$

Exercice 5.3

Soit $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On définit

$$\Delta_\theta := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{cases} |z| < 1 \\ \exists \rho \in]0, \cos(\theta)[,\ \exists \varphi \in]-\theta, \theta[:\quad z = 1 - \rho e^{i\varphi} \end{cases} \right\}.$$

1. Dessiner Δ_θ dans le plan complexe.

2. Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| < 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{1-|z|} \leqslant \frac{2}{1-|z|^2}.$$

3. Montrer que

$$\forall z \in \Delta_\theta, \quad \frac{|1-z|}{1-|z|} \leqslant \frac{2}{\cos(\theta)}.$$

indication

3. Si $z = 1 - \rho e^{i\varphi} \in \Delta_\theta$, $|1-z| = \rho$ et appliquer la question précédente, en développant le dénominateur pour faire apparaître $\cos(\varphi)$, puis, par monotonie de cos, $\cos(\theta)$.

Exercice 5.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} (1+\omega)^n.$$

indication

Se ramener au calcul d'une somme « $\sum_{k=\dots}^{\dots}$ » et utiliser le binôme de Newton.

résultat

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} (1+\omega)^n = 2n.$$

Exercice 5.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$(z+i)^n = (z-i)^n$$

et montrer que ce sont des nombres réels.

Exercice 5.6

> *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *On dit que* n est somme de deux carrés *lorsque*
>
> $$\exists a, b \in \mathbb{Z} : \quad n = a^2 + b^2.$$

Montrer que le produit de deux entiers sommes de deux carrés est un entier somme de deux carrés.

indication

Un entier somme de deux carrés est le module au carré d'un complexe de parties réelle et imaginaire entières.

Exercice 5.7 Noyaux de Dirichlet et de Féjer.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{D}_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} \quad \text{et} \quad \mathrm{K}_n(t) := \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \mathrm{D}_m(t).$$

1. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \equiv 0 \ [2\pi]$. Calculer $\mathrm{D}_n(t)$ et $\mathrm{K}_n(t)$.

2. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \not\equiv 0 \ [2\pi]$. Montrer que

$$\mathrm{D}_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

3. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \not\equiv 0 \ [2\pi]$.

(a) Calculer $\displaystyle\sum_{m=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}$.

(b) En déduire $\mathrm{K}_n(t)$.

résultat

Si $t \equiv 0 \ [2\pi]$,

$$\mathrm{D}_n(t) = 2n+1 \quad \text{et} \quad \mathrm{K}_n(t) = n.$$

Si $t \not\equiv 0 \ [2\pi]$,

$$\mathrm{D}_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)},$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n}{2}t} \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \quad \text{et} \quad \mathrm{K}_n(t) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)^2.$$