Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025

William GREGORY

Colle 5
Nombres complexes

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant vendredi midi.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Inégalités

Exercice 5.1

Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que

$$|a| + |b| \leqslant |a+b| + |a-b|.$$

2. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 5.2

Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que

$$|a-b|^2 \leqslant \left(1+|a|^2\right)\left(1+|b|^2\right).$$

2. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 5.3

Soit $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On définit

$$\Delta_\theta := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{cases} |z| < 1 \\ \exists \rho \in]0, \cos(\theta)[, \ \exists \varphi \in]-\theta, \theta[: \quad z = 1 - \rho e^{i\varphi} \end{cases} \right\}.$$

1. Dessiner Δ_θ dans le plan complexe.

2. Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| < 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{1-|z|} \leqslant \frac{2}{1-|z|^2}.$$

3. Montrer que

$$\forall z \in \Delta_\theta, \quad \frac{|1-z|}{1-|z|} \leqslant \frac{2}{\cos(\theta)}.$$

Racines n-ièmes

Exercice 5.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} (1+\omega)^n.$$

Exercice 5.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$$

et montrer que ce sont des nombres réels.

Divers

Exercice 5.6

> *Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que n* est somme de deux carrés *lorsque*
>
> $$\exists a, b \in \mathbb{Z} : \quad n = a^2 + b^2.$$

Montrer que le produit de deux entiers sommes de deux carrés est un entier somme de deux carrés.

Exercice 5.7 Noyaux de Dirichlet et de Féjer.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{D}_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} \quad \text{et} \quad \mathrm{K}_n(t) := \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \mathrm{D}_m(t).$$

1. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \equiv 0 \ [2\pi]$. Calculer $\mathrm{D}_n(t)$ et $\mathrm{K}_n(t)$.

2. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \not\equiv 0 \ [2\pi]$. Montrer que

$$\mathrm{D}_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

3. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \not\equiv 0 \ [2\pi]$.

(a) Calculer $\displaystyle\sum_{m=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}$.

(b) En déduire $\mathrm{K}_n(t)$.