Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025
William GREGORY

Colle 6 • INDICATIONS
Applications

Exercice 6.1

Soient E et F deux ensembles.
Soit $f : E \longrightarrow F$.
Montrer que

$$\forall B \in \mathscr{P}(F), \quad \left(f^{\langle -1 \rangle}[B]\right)^{\complement} = f^{\langle -1 \rangle}\left[B^{\complement}\right].$$

Exercice 6.2

Soient E et F deux ensembles.
Soit $f : E \longrightarrow F$.

1. Montrer que, en général, l'inclusion suivante est fausse :

$$\forall A \in \mathscr{P}(E), \quad f[A]^{\complement} \subset f\left[A^{\complement}\right].$$

2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur f pour que l'inclusion soit vraie.

résultat

1. $f : x \longmapsto x^2$, $A = [1, 2]$.

2. On a

$$\left(\forall A \in \mathscr{P}(E), \quad f[A]^{\complement} \subset f\left[A^{\complement}\right]\right) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est surjective.}$$

Exercice 6.3

Soient E et F deux ensembles.
Soit $f : E \longrightarrow F$.

1. Montrer que

$$\forall B \in \mathscr{P}(F), \quad f\left[f^{\langle -1 \rangle}[B]\right] \subset B.$$

2. Montrer que l'inclusion réciproque est fausse en général.

3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur f pour qu'il y ait égalité.

indication

3. Appliquer l'égalité à $B = F$.

résultat

2. $f : x \longmapsto x^2$, $B = [-2, -1]$.

3. On a
$$\left(\forall B \in \mathscr{P}(F), \quad f\left[f^{\langle -1\rangle}[B]\right] \subset B\right) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est surjective.}$$

Exercice 6.4

Soient E et F deux ensembles.
Soit $f : E \longrightarrow F$.

1. Montrer que
$$\forall A, A' \in \mathscr{P}(E), \quad f[A \cap A'] \subset f[A] \cap f[A'].$$

2. Montrer que l'inclusion réciproque est fausse en général.

3. Montrer que l'inclusion réciproque est vraie si, et seulement si, f est injective.

indication

3. Regarder l'égalité pour $A = \{x\}$ et $A' = \{y\}$.

résultat

2. $f : x \longmapsto x^2$, $A = [-2, -1]$, $A' = [1, 2]$.

Exercice 6.5

On considère l'application
$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{U} \times \mathbb{R}_+^* \\ z & \longmapsto & \left(\dfrac{z}{|z|}, |z|\right) \end{array} \right. .$$

1. Vérifier que f est correctement définie.

2. Montrer que f est une bijection.

3. Déterminer la réciproque f^{-1}.

résultat

$$f^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{U} \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ (\alpha, t) & \longmapsto & t\alpha. \end{array} \right.$$

Exercice 6.6

Soit E un ensemble.

1. Expliciter une bijection

$$\Psi : \mathscr{P}(E) \longrightarrow \{0,1\}^E,$$

dont on déterminera la réciproque.

2. Soient $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$.
On admet les deux égalités suivantes :

$$\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_{A\Delta B} = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2.$$

Montrer que

$$(A\Delta B)\cap C = (A\cap C)\Delta(B\cap C).$$

indication

1. Penser aux fonctions indicatrices et images réciproques.

2. Montrer que ces deux ensembles ont même fonction indicatrice et conclure à l'aide de la première question.

résultat

$$\Psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \{0,1\}^E \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \Psi^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} \{0,1\}^E & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ f & \longmapsto & f^{\langle -1\rangle}\big[\{1\}\big]. \end{array} \right.$$

Exercice 6.7

1. Montrer que

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array} \right.$$

est une bijection.

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
Montrer que $]a,b[$ et $\mathbb{R}$ sont en bijection.

indication

1.
- ne pas oublier de vérifier que l'application est correctement définie
- <u>INJECTIVITÉ.</u> si $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = f(y)$, x et y ont le même signe. Un calcul montre que $x = y$.
- <u>SURJECTIVITÉ.</u> à vérifier, en distinguant les signes.

2. Déterminer l'unique application affine φ telle que $\varphi(-1) = a$ et $\varphi(1) = b$, considérer sa restriction à $]-1,1[$. On montre alors que $]-1,1[$ et $]a,b[$ sont en bijection.

résultat

L'application φ de l'indication est $\varphi : x \longmapsto \alpha x + \beta$ où $\alpha = \dfrac{b-a}{2}$ et $\beta = \dfrac{b+a}{2}$.

Exercice 6.8

On note

$$\mathbb{D} := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| < 1 \right\}$$
$$\Pi^+ := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathfrak{Re}(z) > 0 \right\}.$$

On pose

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}, \quad h(z) := \frac{1-z}{z+1}.$$

Montrer que

$$h[\mathbb{D}] = \Pi^+.$$

indication

$\boxed{\subset}$ On montrera que $\mathfrak{Re}(h(z)) = \dfrac{1-|z|^2}{|1+z|^2}$ pour en déduire que $h[\mathbb{D}] \subset \Pi^+$.

$\boxed{\supset}$ On montre que h est bijective, de réciproque $h^{-1} = h$, pour montrer que $h^{-1}[\Pi^+] \subset \mathbb{D}$.