Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025

William GREGORY

Colle 6
Applications

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mercredi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Propriétés des images directes et réciproques

Exercice 6.1

Soient E et F deux ensembles.
Soit $f : E \longrightarrow F$.
Montrer que

$$\forall B \in \mathscr{P}(F), \quad \left(f^{\langle -1\rangle}[B]\right)^{\complement} = f^{\langle -1\rangle}\left[B^{\complement}\right].$$

Exercice 6.2

Soient E et F deux ensembles.
Soit $f : E \longrightarrow F$.

1. Montrer que, en général, l'inclusion suivante est fausse :

$$\forall A \in \mathscr{P}(E), \quad f[A]^{\complement} \subset f\left[A^{\complement}\right].$$

2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur f pour que l'inclusion soit vraie.

Exercice 6.3

Soient E et F deux ensembles.
Soit $f : E \longrightarrow F$.

1. Montrer que

$$\forall B \in \mathscr{P}(F), \quad f\left[f^{\langle -1\rangle}[B]\right] \subset B.$$

2. Montrer que l'inclusion réciproque est fausse en général.

3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur f pour qu'il y ait égalité.

Exercice 6.4

Soient E et F deux ensembles.
Soit $f : E \longrightarrow F$.

1. Montrer que
$$\forall A, A' \in \mathscr{P}(E), \quad f[A \cap A'] \subset f[A] \cap f[A'].$$

2. Montrer que l'inclusion réciproque est fausse en général.

3. Montrer que l'inclusion réciproque est vraie si, et seulement si, f est injective.

Autres exercices

Exercice 6.5

On considère l'application
$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{U} \times \mathbb{R}_+^* \\ z & \longmapsto & \left(\dfrac{z}{|z|}, |z| \right) \end{array} \right. .$$

1. Vérifier que f est correctement définie.

2. Montrer que f est une bijection.

3. Déterminer la réciproque f^{-1}.

Exercice 6.6

Soit E un ensemble.

1. Expliciter une bijection
$$\Psi : \mathscr{P}(E) \longrightarrow \{0,1\}^E,$$
dont on déterminera la réciproque.

2. Soient $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$.
On admet les deux égalités suivantes :
$$\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \text{ et } \mathbb{1}_{A \Delta B} = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2.$$
Montrer que
$$(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C).$$

Exercice 6.7

1. Montrer que
$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array} \right.$$
est une bijection.

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
Montrer que $]a,b[$ et $\mathbb{R}$ sont en bijection.

Exercice 6.8

On note
$$\mathbb{D} := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| < 1 \right\}$$
$$\Pi^+ := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathfrak{Re}(z) > 0 \right\}.$$

On pose
$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}, \quad h(z) := \frac{1-z}{z+1}.$$

Montrer que
$$h[\mathbb{D}] = \Pi^+.$$