Colle 7 • INDICATIONS
Fonctions usuelles, Convexité

Exercice 7.1

Montrer que

$$\forall x > 0, \quad 2\ln(x) < x.$$

Exercice 7.2

1. Montrer que

$$\forall t \in]0,1], \quad 1 - \frac{1}{t} \leqslant \ln(t) \leqslant t - 1.$$

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x < y$.
Montrer que

$$\frac{1}{y} \leqslant \frac{\ln(x) - \ln(y)}{x - y} \leqslant \frac{1}{y}.$$

indication

1. Faire deux études de fonctions.
2. Poser $t := \dfrac{x}{y}$.

Exercice 7.3

Soient $u, v \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $0 < u \leqslant v$.
Montrer que

$$\ln\left(1 + \frac{u}{v}\right) \ln\left(1 + \frac{v}{u}\right) \leqslant \ln(2)^2.$$

indication

Étudier la monotonie de $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+ux)}{\ln(1+vx)}$.

résultat

La fonction f a pour dérivée

$$f' : x \longmapsto \frac{u(1+vx)\ln(1+vx) - v(1+ux)\ln(1+ux)}{(1+ux)(1+vx)\ln(1+vx)^2},$$

et est donc croissante.

Exercice 7.4

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x \leqslant \ln(1+e^x) \leqslant x + \ln(2).$$

indication

On utilisera que $x = \ln(e^x)$.

Exercice 7.5

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^2 \geqslant 4x.$$

Exercice 7.6

1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\sin(x)\right| \leqslant |x|.$$

2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\sin(nx)\right| \leqslant n|x|.$$

indication

- Par étude de fonction, on montre que $\sin(x) \leqslant x$.
- On montre aussi que $x \longmapsto \left|\sin(x)\right|$ est paire.

Exercice 7.7

Déterminer les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ xyz=1. \end{cases}$$

indication

Repérer une solution « évidente ». Justifier que $x, y, z \neq 0$ et étudier $f_y : x \longmapsto x + y + \dfrac{1}{xy}$ à y fixé, lui déterminer un minimum local strict $g(y)$ et étudier g.

résultat

$$(x, y, z) = (1, 1, 1).$$

Exercice 7.8

Résoudre

$$\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leqslant \ln(2).$$

indication

Il faut d'abord déterminer le domaine de validité de l'équation puis utiliser les propriétés du logarithme.

résultat

$$x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]-1, -\frac{3}{5}\right[\cup \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[.$$

Exercice 7.9

Montrer que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \forall s > 0, \quad \mathrm{e}^{sy} \leqslant \frac{1-y}{2}\mathrm{e}^{-s} + \frac{1+y}{2}\mathrm{e}^{s}.$$

indication

Remarquer que

$$\frac{1-y}{2} + \frac{1+y}{2} = 1.$$

Exercice 7.10

Montrer que

$$\forall x, y \in \left]1, +\infty\right[, \quad \sqrt{\ln(x)\ln(y)} \leqslant \ln\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

indication

On peut étudier $f : x \longmapsto -\ln(\ln(x))$.

Exercice 7.11

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est convexe ;

(ii) l'inégalité des trois pentes est vérifiée :

$$\forall x, y, z \in I, \quad x < y < z \implies \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y} ;$$

(iii) pour tout $a \in I$, $\tau_a : x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

2. Application.

Quelles sont les fonctions $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ à la fois convexes et concaves ?

indication

1. On utilise principalement que tout réel $y \in \left]x, y\right[$ s'écrit

$$y = (1-\lambda)x + \lambda y \text{ avec } \lambda \in \left]0, 1\right[.$$

2. La fonction τ_0 est à la fois croissante et décroissante donc constante, donc $\tau_0(x) = \tau_0(1)$.

résultat

2. Les fonctions affines.