Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025

William GREGORY

Colle 7

Fonctions usuelles, Convexité

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mercredi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Inégalités

Exercice 7.1

Montrer que

$$\forall x > 0, \quad 2\ln(x) < x.$$

Exercice 7.2

1. Montrer que

$$\forall t \in]0,1], \quad 1 - \frac{1}{t} \leqslant \ln(t) \leqslant t - 1.$$

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x < y$.
Montrer que

$$\frac{1}{y} \leqslant \frac{\ln(x) - \ln(y)}{x - y} \leqslant \frac{1}{y}.$$

Exercice 7.3

Soient $u, v \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $0 < u \leqslant v$.
Montrer que

$$\ln\left(1 + \frac{u}{v}\right)\ln\left(1 + \frac{v}{u}\right) \leqslant \ln(2)^2.$$

Exercice 7.4

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x \leqslant \ln(1 + e^x) \leqslant x + \ln(2).$$

Exercice 7.5

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^2 \geqslant 4x.$$

Exercice 7.6

1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\sin(x)\right| \leqslant |x|.$$

2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\sin(nx)\right| \leqslant n|x|.$$

Fonctions usuelles

Exercice 7.7

Déterminer les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ xyz = 1. \end{cases}$$

Exercice 7.8

Résoudre

$$\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leqslant \ln(2).$$

Convexité

Exercice 7.9

Montrer que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \forall s > 0, \quad \mathrm{e}^{sy} \leqslant \frac{1-y}{2}\mathrm{e}^{-s} + \frac{1+y}{2}\mathrm{e}^{s}.$$

Exercice 7.10

Montrer que

$$\forall x, y \in \,]1, +\infty[, \quad \sqrt{\ln(x)\ln(y)} \leqslant \ln\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Exercice 7.11

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- **(i)** f est convexe ;
- **(ii)** l'inégalité des trois pentes est vérifiée :

$$\forall x, y, z \in I, \quad x < y < z \implies \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}\ ;$$

- **(iii)** pour tout $a \in I$, $\tau_a : x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

2. Application.

Quelles sont les fonctions $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ à la fois convexes et concaves ?