William GREGORY

Colle 8 • INDICATIONS

Fonctions usuelles, Convexité, Trigonométrie

Exercice 8.1

1. Montrer que

$$\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leqslant x.$$

2. Montrer que

$$\forall n \geqslant 2, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

indication

1. Étudier $f : x \longmapsto x - \ln(1+x)$.

2. Écrire sous forme exponentielle les deux termes de l'encadrement et appliquer la première question.

Exercice 8.2

Montrer que

$$\forall x > -1, \quad (1+x)^x \geqslant 1.$$

indication

Étudier $f : x \longmapsto (1+x)^x = \mathrm{e}^{x\ln(1+x)}$ pour chercher un minimum. Étudier une fonction pour étudier f'.

Exercice 8.3

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin\big(\cos(x)\big) < \cos\big(\sin(x)\big).$$

indication

On montre que $f : x \longmapsto \sin(\cos(x)) - \cos(\sin(x))$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'elle a alors un signe constant.
On utilisera notamment que :

- $\sin(x) = \dfrac{\pi}{2} - \cos(x)$;
- $a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\varphi)$.

Exercice 8.4

1. Montrer que
$$\forall t \in]0,1], \quad 1 - \frac{1}{t} \leqslant \ln(t) \leqslant t - 1.$$

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x < y$.
Montrer que
$$\frac{1}{y} \leqslant \frac{\ln(x) - \ln(y)}{x - y} \leqslant \frac{1}{y}.$$

indication

1. Faire deux études de fonctions.
2. Poser $t := \dfrac{x}{y}$.

Exercice 8.5

Laquelle des fonctions
$$x \longmapsto (x^2)^{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad x \longmapsto \sqrt{x}^{x^2}$$
est négligeable devant l'autre en $+\infty$?

indication

Calculer le quotient des deux en utilisant que $a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}$. Un quotient tend vers 0 et l'autre vers $+\infty$.

résultat

En $+\infty$, $x \longmapsto (x^2)^{\sqrt{x}}$ est négligeable devant $x \longmapsto \sqrt{x}^{x^2}$.

Exercice 8.6

Laquelle des fonctions
$$x \longmapsto (\mathrm{e}^x)^x \quad \text{et} \quad x \longmapsto x^{\mathrm{e}^x}$$
est négligeable devant l'autre en $+\infty$?

indication

Calculer le quotient des deux en utilisant que $a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}$. Un quotient tend vers 0 et l'autre vers $+\infty$.

résultat

En $+\infty$, $x \longmapsto (\mathrm{e}^x)^x$ est négligeable devant $x \longmapsto x^{\mathrm{e}^x}$.

Exercice 8.7

Laquelle des fonctions

$$x \longmapsto \ln(x)^x + x^4 \quad \text{et} \quad x \longmapsto x$$

est négligeable devant l'autre en $+\infty$?

indication

Calculer le quotient des deux en utilisant que $a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}$ et les croissances comparées. Un quotient tend vers 0 et l'autre vers $+\infty$.

résultat

En $+\infty$, $x \longmapsto x$ est négligeable devant $x \longmapsto \ln(x)^x + x^4$.

Exercice 8.8

Déterminer $\max\limits_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{n}$.

indication

On étudie la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{\ln(x)}{x}}$, croissante sur $]0, \mathrm{e}]$, décroissante sur $]\mathrm{e}, +\infty[$.

résultat

$$\max_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{n} = \sqrt[3]{3}.$$

Exercice 8.9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_n > 0$. Soit $\alpha > 0$.
Montrer que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|^{\alpha} \leqslant n^{\alpha-1} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^{\alpha}.$$

indication

Appliquer l'inégalité de Jensen avec $x \longmapsto |x|^{\alpha}$.

Exercice 8.10 Inégalités de Young, Hölder et Minkowski.

Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que
$$\forall x, y > 0, \quad xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.

2. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} {u_k}^p\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\sum_{k=1}^{n} {v_k}^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

3. Montrer que
$$\left(\sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} {u_k}^p\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\sum_{k=1}^{n} {v_k}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

indication

1. Utiliser la convexité de l'exponentielle en utilisant que $a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}$.

2. Utiliser l'inégalité précédente pour chaque $u_k v_k$ puis sommer.

3. $(u_k + v_k)^p = (u_k + v_k)(u_k + v_k)^{p-1} \leqslant u_k(u_k + v_k)^{p-1} + v_k(u_k + v_k)^{p-1}$ et $p - 1 = \dfrac{p}{q}$.