William GREGORY

Colle 8

Fonctions usuelles, Convexité, Trigonométrie

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant lundi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Inégalités

Exercice 8.1

1. Montrer que

$$\forall x > -1, \ \ln(1+x) \leqslant x.$$

2. Montrer que

$$\forall n \geqslant 2, \ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Exercice 8.2

Montrer que

$$\forall x > -1, \quad (1+x)^x \geqslant 1.$$

Exercice 8.3

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin\big(\cos(x)\big) < \cos\big(\sin(x)\big).$$

Exercice 8.4

1. Montrer que

$$\forall t \in \,]0,1], \quad 1-\frac{1}{t} \leqslant \ln(t) \leqslant t-1.$$

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x < y$.
Montrer que

$$\frac{1}{y} \leqslant \frac{\ln(x)-\ln(y)}{x-y} \leqslant \frac{1}{y}.$$

Fonctions usuelles

Exercice 8.5

Laquelle des fonctions

$$x \longmapsto (x^2)^{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad x \longmapsto \sqrt{x}^{x^2}$$

est négligeable devant l'autre en $+\infty$?

Exercice 8.6

Laquelle des fonctions

$$x \longmapsto (\mathrm{e}^x)^x \quad \text{et} \quad x \longmapsto x^{\mathrm{e}^x}$$

est négligeable devant l'autre en $+\infty$?

Exercice 8.7

Laquelle des fonctions

$$x \longmapsto \ln(x)^x + x^4 \quad \text{et} \quad x \longmapsto x$$

est négligeable devant l'autre en $+\infty$?

Exercice 8.8

Déterminer $\max\limits_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{n}$.

Convexité

Exercice 8.9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_n > 0$. Soit $\alpha > 0$.
Montrer que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right|^{\alpha} \leqslant n^{\alpha - 1} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^{\alpha}.$$

Exercice 8.10 Inégalités de Young, Hölder et Minkowski.

Soient $p, q \in \left]1, +\infty\right[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que

$$\forall x, y > 0, \quad xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.

2. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} {u_k}^p \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\sum_{k=1}^{n} {v_k}^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

3. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} {u_k}^p \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\sum_{k=1}^{n} {v_k}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$