Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025

William GREGORY

Colle 9 • INDICATIONS
Analyse, Convexité, Groupes

Exercice 9.1

1. Montrer que

$$\forall t \in]0,1], \quad 1-\frac{1}{t} \leqslant \ln(t) \leqslant t-1.$$

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x < y$.
Montrer que

$$\frac{1}{x} \leqslant \frac{\ln(x)-\ln(y)}{x-y} \leqslant \frac{1}{y}.$$

indication

1. Faire deux études de fonctions.
2. Poser $t := \dfrac{x}{y}$.

Exercice 9.2

Déterminer $\max\limits_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{n}$.

indication

On étudie la fonction $f : x \longmapsto e^{\frac{\ln(x)}{x}}$, croissante sur $]0, e]$, décroissante sur $]e, +\infty[$.

résultat

$$\max_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{n} = \sqrt[3]{3}.$$

Exercice 9.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Soit $\alpha > 0$.
Montrer que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|^{\alpha} \leqslant n^{\alpha-1}\sum_{k=1}^{n}|x_k|^{\alpha}.$$

indication

Appliquer l'inégalité de Jensen avec $x \longmapsto |x|^{\alpha}$.

Exercice 9.4

Montrer que

$$\Gamma_\infty := \{z \in \mathbb{C} \quad | \quad \exists n \in \mathbb{N}^* : \quad z^n = 1\}$$

est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exercice 9.5

Montrer que

$$\lambda : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & 10^x \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de groupes.

indication

L'énoncé est vague : il faut définir les groupes entre lesquels il y a l'isomorphisme : $(\mathbb{R}, +, 0)$ et $(\mathbb{R}_+^*, \times, 1)$.
On vérifie d'abord que λ est correctement définie, est un morphisme des groupes considérés. L'injectivité se vérifie par le noyau et la surjectivité par passage au logarithme.

Exercice 9.6

Soit G un groupe. On note $\varphi : g \longmapsto g^{-1}$.
Montrer que φ est un automorphisme si, et seulement si, G est abélien.

indication

- ♦ Attention, φ n'est pas un morphisme de groupes en général.
- $\boxed{\Rightarrow}$ Comme φ est un automorphisme de groupes, il s'agit de montrer que, pour tous g, h, on a $ghg^{-1}h^{-1} \in \text{Ker}(\varphi)$.
- $\boxed{\Leftarrow}$ D'abord vérifier que φ est un morphisme de groupes, puis l'injectivité avec le noyau et la surjectivité.

Exercice 9.7

Soit G un groupe. Soient H et K deux sous-groupes de G.
Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si, et seulement si, $K \subset H$ ou $H \subset K$.

indication

Raisonner par contraposée.

Exercice 9.8

Pour tout groupe G, on note $\text{Aut}(G)$ l'ensemble de ses automorphismes.

Soient G_1 et G_2 deux groupes isomorphes.
Montrer que $\text{Aut}(G_1)$ et $\text{Aut}(G_2)$ sont isomorphes.

indication

On vérifiera d'abord que $\mathrm{Aut}(G_1)$ et $\mathrm{Aut}(G_2)$ sont des groupes.
Si l'on note $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ un isomorphisme de G_1 dans G_2, montrer que

$$\forall \psi \in \mathrm{Aut}(G_2), \quad \varphi^{-1} \circ \psi \circ \varphi \in \mathrm{Aut}(G_1).$$

Exercice 9.9

Soit G un groupe. On appelle centre de G *l'ensemble*

$$\mathrm{Z}(G) := \{g \in G \quad | \quad \forall h \in G, \ \ gh = hg\}\,.$$

1. Soit G un groupe. Montrer que $\mathrm{Z}(G)$ est un sous-groupe de G.

2. Soit G un groupe. Soit H un sous-groupe de G.
Montrer que $\mathrm{Z}(G) \cap H$ est un sous-groupe de $\mathrm{Z}(H)$.

3. Soient G et G' deux groupes. Soit $f : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupes surjectif.
Montrer que $f\big[\mathrm{Z}(G)\big]$ est un sous-groupe de $\mathrm{Z}(G')$.

Exercice 9.10

On note $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}) := \{x \longmapsto \alpha x + \beta \ \ ; \ \ \alpha \in \mathbb{R}^*, \beta \in \mathbb{R}\}$.

1. Définir une structure de groupe sur $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$.

2. Le groupe $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ est-il abélien ?

Soit $(G, +, \mathrm{e})$ *un groupe.*

- *Pour* $g, h \in G$, *on note* $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$.
- *On note* $\mathrm{D}(G) := \Big\langle \big\{[g, h] \ \ ; \ \ g, h \in G\big\} \Big\rangle$.
- *On note* $\mathrm{D}^0(G) := G$ *et, pour* $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{D}^k(G) := \mathrm{D}\big(\mathrm{D}^{k-1}(G)\big)$.

3. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{D}^k\big(\mathrm{Aff}(\mathbb{R})\big) = \{\mathrm{Id}\}$.

résultat

1. On vérifie que $\big(\mathrm{Aff}(\mathbb{R}), \circ, \mathrm{Id}\big)$ définit une structure de groupe.

2. Non.

3. On a $\mathrm{D}^2\big(\mathrm{Aff}(\mathbb{R})\big) = \{\mathrm{Id}\}$.