Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025

William GREGORY

Colle 9

Analyse, Convexité, Groupes

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mercredi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Analyse

Exercice 9.1

1. Montrer que

$$\forall t \in \left]0,1\right], \quad 1-\frac{1}{t} \leqslant \ln(t) \leqslant t-1.$$

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x < y$.
Montrer que

$$\frac{1}{x} \leqslant \frac{\ln(x)-\ln(y)}{x-y} \leqslant \frac{1}{y}.$$

Exercice 9.2

Déterminer $\max\limits_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{n}$.

Exercice 9.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Soit $\alpha > 0$.
Montrer que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|^{\alpha} \leqslant n^{\alpha-1} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^{\alpha}.$$

Groupes

Exercice 9.4

Montrer que

$$\Gamma_\infty := \{z \in \mathbb{C} \quad | \quad \exists n \in \mathbb{N}^* : \ z^n = 1\}$$

est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exercice 9.5

Montrer que

$$\lambda : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & 10^x \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de groupes.

Exercice 9.6

Soit G un groupe. On note $\varphi : g \longmapsto g^{-1}$.
Montrer que φ est un automorphisme si, et seulement si, G est abélien.

Exercice 9.7

Soit G un groupe. Soient H et K deux sous-groupes de G.
Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si, et seulement si, $K \subset H$ ou $H \subset K$.

Exercice 9.8

Pour tout groupe G, on note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble de ses automorphismes.

Soient G_1 et G_2 deux groupes isomorphes.
Montrer que $\mathrm{Aut}(G_1)$ et $\mathrm{Aut}(G_2)$ sont isomorphes.

Exercice 9.9

Soit G un groupe. On appelle centre de G *l'ensemble*

$$\mathrm{Z}(G) := \{g \in G \quad | \quad \forall h \in G, \ \ gh = hg\}.$$

1. Soit G un groupe. Montrer que $\mathrm{Z}(G)$ est un sous-groupe de G.
2. Soit G un groupe. Soit H un sous-groupe de G.
   Montrer que $\mathrm{Z}(G) \cap H$ est un sous-groupe de $\mathrm{Z}(H)$.
3. Soient G et G' deux groupes. Soit $f : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupes surjectif.
   Montrer que $f\left[\mathrm{Z}(G)\right]$ est un sous-groupe de $\mathrm{Z}(G')$.

Exercice 9.10

On note $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}) := \{x \longmapsto \alpha x + \beta \ ; \ \ \alpha \in \mathbb{R}^*, \beta \in \mathbb{R}\}$.

1. Définir une structure de groupe sur $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$.
2. Le groupe $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ est-il abélien ?

Soit $(G, +, \mathrm{e})$ un groupe.

- *Pour $g, h \in G$, on note $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$.*
- *On note $\mathrm{D}(G) := \left\langle \left\{[g, h] \ ; \ \ g, h \in G\right\} \right\rangle$.*
- *On note $\mathrm{D}^0(G) := G$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{D}^k(G) := \mathrm{D}\left(\mathrm{D}^{k-1}(G)\right)$.*

3. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{D}^k\left(\mathrm{Aff}(\mathbb{R})\right) = \{\mathrm{Id}\}$.