Colle 10 • INDICATIONS

Groupes, Anneaux et corps, Intégrales

Exercice 10.1

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Calculer

$$\frac{n}{\displaystyle\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t}.$$

résultat

$$\frac{n}{\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t} = \frac{n-1}{n^{n-2}(2^{n-1}-1)}.$$

Exercice 10.2

Calculer

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^x+1}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

indication

On remarquera que $\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^x+1 = (\mathrm{e}^x+1)^2+\mathrm{e}^x$, et l'on reconnaîtra la primitive de l'inverse.

résultat

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^x+1}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}+1}.$$

Exercice 10.3

Calculer

$$\int_{-1}^{2} \Big(|x-1| - |4x+2|\Big)\,\mathrm{d}x.$$

indication

Écrire la valeur de $|x-1| - |4x+2|$ sur les intervalles $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$, $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ et $[1, 2]$.

résultat

$$\int_{-1}^{2} \big(|x-1| - |4x+2|\big)\,\mathrm{d}x = -\frac{21}{2}.$$

Exercice 10.4

Calculer

$$\int_1^2 \frac{t}{2t+1}\,\mathrm{d}t.$$

indication

On a $\dfrac{t}{2t+1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2t+1}$.

résultat

$$\int_1^2 \frac{t}{2t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \frac{\ln(3)-\ln(5)}{4}.$$

Exercice 10.5

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Calculer

$$\int_2^3 t^{n-1}\sqrt{t^n+3}\,\mathrm{d}t.$$

indication

On reconnaît la forme $u'\sqrt{u}$.

résultat

$$\int_2^3 t^{n-1}\sqrt{t^n+3}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3n}\Big((3^n+3)^{\frac{3}{2}} - (2^n+3)^{\frac{3}{2}}\Big).$$

Exercice 10.6

1. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t+3}{(t+1)(t+2)} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t+2}.$$

2. Calculer $\displaystyle\int_{-4}^{-3} \frac{t+3}{(t+1)(t+2)}\,\mathrm{d}t$.

résultat

1. $a = 2$ et $b = -1$.

2. $\displaystyle\int_{-4}^{-3} \frac{t+3}{(t+1)(t+2)}\,\mathrm{d}t = 3\ln(2) - 2\ln(3)$.

Exercice 10.7

On définit

$$\mathbb{Z}[\mathrm{i}] := \{x + \mathrm{i}y \ ; \ x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ est un anneau.

2. L'anneau $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ est-il isomorphe à l'anneau produit $\mathbb{Z}^2$?

3. Déterminer $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]^\times$.

indication

1. Montrer qu'il s'agit d'un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

2. Regarder l'intégrité des deux anneaux.

3. On utilisera l'application $N : z \longmapsto |z|^2$.

résultat

2. Non.

3. $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]^\times = \{1, -1, -\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$.

Exercice 10.8

On considère les anneaux

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \left\{a + b\sqrt{2} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}\right\},$$
$$\mathbb{Z}[\sqrt{3}] := \left\{a + b\sqrt{3} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Montrer qu'il n'existe pas de morphisme d'anneaux entre $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ et $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

indication

Si un tel morphisme existait, regarder l'image de $\sqrt{2}$ en remarquant que l'image d'un carré est un carré. Aboutir à une contradiction avec l'irrationalité de $\sqrt{3}$.

Exercice 10.9

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On note

$$A(d) := \left\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; y \equiv x \ [d]\right\}.$$

1. Montrer que $A(d)$ est un sous-anneau de l'anneau produit $\mathbb{Z}^2$.

2. Soit B un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$.

Montrer que

$$H := \left\{x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; (x, 0) \in B\right\}$$

est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

3. **(a)** Soit G un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $G = n\mathbb{Z}$.

(b) Montrer que tout sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$ est de la forme $A(d)$.

indication

2. On peut raisonner avec l'image réciproque.
3. **(a)** On utilisera notamment la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.
   (b) Après avoir fixé d tel que $H = d\mathbb{Z}$, utiliser la stabilité par $-$ d'un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 10.10

Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, on note $\mathbb{Z}[\alpha]$ le plus petit sous-anneau de $\mathbb{C}$ contenant α.

1. A-t-on

$$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \left\{ a + \frac{b}{\sqrt{2}} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\} \text{ ?}$$

2. Déterminer explicitement $\mathbb{Z}\left[\sqrt[4]{3}\right]$.

indication

1. A-t-on $\frac{1}{2}$ dedans ?
2. Calculer les puissances de $\sqrt[4]{3}$.

résultat

1. Non.
2. $\mathbb{Z}\left[\sqrt[4]{3}\right] = \left\{ a + b\sqrt[4]{3} + c\sqrt[4]{9} + d\sqrt[4]{27} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$.

Exercice 10.11

Soit A un anneau fini intègre.
Montrer que A est un corps.

indication

Pour $a \neq 0$, montrer que l'application $\left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & ax \end{array} \right.$ est injective. Comme A est fini, elle sera bijective.

Exercice 10.12

Soit A un anneau quelconque. Soit $a \in A$. On note

$$\mathrm{m}_a : \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & ax. \end{array} \right.$$

Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

(i) $a \in A^{\times}$;
(ii) $1 \in \mathrm{Im}(\mathrm{m}_a)$;
(iii) m_a est surjective ;
(iv) m_a est bijective.