Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025

William GREGORY

Colle 10

Groupes, Anneaux et corps, Intégrales

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mercredi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Calcul d'intégrales

Exercice 10.1

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Calculer

$$\frac{n}{\displaystyle\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t}.$$

Exercice 10.2

Calculer

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^x+1}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 10.3

Calculer

$$\int_{-1}^{2} \big(|x-1|-|4x+2|\big)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 10.4

Calculer

$$\int_1^2 \frac{t}{2t+1}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 10.5

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Calculer

$$\int_2^3 t^{n-1}\sqrt{t^n+3}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 10.6

1. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t+3}{(t+1)(t+2)} = \frac{a}{t+1}+\frac{b}{t+2}.$$

2. Calculer $\displaystyle\int_{-4}^{-3} \frac{t+3}{(t+1)(t+2)}\,\mathrm{d}t$.

Groupes, anneaux et corps

Exercice 10.7

On définit

$$\mathbb{Z}[\mathrm{i}] := \{x + \mathrm{i}y \ ; \ x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ est un anneau.

2. L'anneau $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ est-il isomorphe à l'anneau produit $\mathbb{Z}^2$?

3. Déterminer $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]^\times$.

Exercice 10.8

On considère les anneaux

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[\sqrt{2}] &:= \left\{a + b\sqrt{2} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}\right\},\\ \mathbb{Z}[\sqrt{3}] &:= \left\{a + b\sqrt{3} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}\right\}.\end{aligned}$$

Montrer qu'il n'existe pas de morphisme d'anneaux entre $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ et $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

Exercice 10.9

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On note

$$A(d) := \left\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; y \equiv x \ [d]\right\}.$$

1. Montrer que $A(d)$ est un sous-anneau de l'anneau produit $\mathbb{Z}^2$.

2. Soit B un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$.
Montrer que

$$H := \left\{x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; (x, 0) \in B\right\}$$

est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

3. **(a)** Soit G un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $G = n\mathbb{Z}$.

(b) Montrer que tout sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$ est de la forme $A(d)$.

Exercice 10.10

Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, on note $\mathbb{Z}[\alpha]$ le plus petit sous-anneau de $\mathbb{C}$ contenant α.

1. A-t-on

$$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \left\{a + \frac{b}{\sqrt{2}} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}\right\} \ ?$$

2. Déterminer explicitement $\mathbb{Z}\left[\sqrt[4]{3}\right]$.

Exercice 10.11

Soit A un anneau fini intègre.
Montrer que A est un corps.

Exercice 10.12

Soit A un anneau quelconque. Soit $a \in A$. On note

$$\mathrm{m}_a : \left|\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & ax. \end{array}\right.$$

Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

(i) $a \in A^\times$;

(ii) $1 \in \mathrm{Im}(\mathrm{m}_a)$;

(iii) m_a est surjective ;

(iv) m_a est bijective.