Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025

William GREGORY

# Colle 11 • INDICATIONS

## Polynômes, Calcul intégral

### Exercice 11.1

Calculer les intégrales

$$I := \int_0^{\pi/6} \frac{\cos^2(t)}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J := \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2(t)}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t.$$

*indication*

- Calculer $I - J$.
- Calculer $I + J$ en utilisant que

$$\frac{1}{\cos(2t)} = \frac{1}{1-\sin^2(2t)},$$

puis en effectuant le changement de variable $u = \sin(2t)$, en décomposant en éléments simples $\frac{1}{1-u^2}$.
- On obtient un système en $I$ et $J$, à résoudre pour trouver $I$ et $J$.

*résultat*

$$I - J = \frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad I + J = \frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$
$$I = \frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{3}\right) + \frac{\pi}{12} \quad \text{et} \quad J = \frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{3}\right) - \frac{\pi}{12}.$$

### Exercice 11.2

Calculer

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

*indication*

On effectue le changement de variable $x = \sin(t)$.

*résultat*

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

## Exercice 11.3

Calculer

$$\int_{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

***indication***

On effectue le changement de variable $x = 1 - \sin(t)$ ou $1 - \cos(t)$.

***résultat***

$$\int_{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{12}.$$

## Exercice 11.4

Calculer

$$\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t.$$

***indication***

Procéder par intégration par parties, en utilisant que

$$\frac{2t^2}{1+t^2} = 2 - \frac{2}{1+t^2}.$$

***résultat***

$$\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

## Exercice 11.5

Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on définit la fonction

$$f_{p,q} : \left| \begin{array}{ccc} ]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varepsilon & \longmapsto & \displaystyle\int_\varepsilon^1 t^p \ln(t)^q\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

On note $I_{p,q} := \lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_{p,q}(\varepsilon)$.
Déterminer l'expression de $I_{p,q}$ en fonction de $p$ et de $q$.

***indication***

- Calculer $I_{p,0}$.
- Pour $q \geqslant 1$, exprimer $I_{p,q}$ en fonction de $p$, de $q$ et de $I_{p,q-1}$, par intégration par parties.
- En déduire l'expression par récurrence sur $q$.

**résultat**

- $I_{p,0} = \dfrac{1}{p+1}$.
- $I_{p,q} = \dfrac{-q}{p+1} I_{p,q-1}$.
- $I_{p,q} = (-1)^q \dfrac{q!}{(p+1)^{q+1}}$.

## Exercice 11.6

Soit $P \coloneqq \mathrm{X}^3 + 3\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} - 1$.
On note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ses trois racines complexes.
Calculer $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant 3 \\ i\neq j}} \frac{\alpha_i}{\alpha_j}$.

**indication**

Justifier l'existence de la somme en remarquant que 0 n'est pas racine de $P$.
Multiplier la somme par $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ et exploiter les relations coefficients-racines.

**résultat**

$$\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant 3 \\ i\neq j}} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} = -9.$$

## Exercice 11.7

Soit $P \coloneqq a_0 + a_1\mathrm{X} + \cdots + a_n\mathrm{X}^n \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

**1.** Soit $r > 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\int_0^{2\pi} P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t.$$

**2.** On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \left|P(z)\right| \leqslant M.$$

Montrer que $P$ est constant.

**indication**

**1.** Calculer, pour $\ell \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell t}\,\mathrm{d}t$.

**2.** Utiliser l'inégalité triangulaire intégrale ($\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \left|f(t)\right|\mathrm{d}t$) et passer à la limite pour montrer que les $a_k$ pour $k \geqslant 1$ sont nuls.

**résultat**

$$\int_0^{2\pi} P\left(re^{it}\right)e^{-ikt}\,dt = \begin{cases} 2\pi a_k r^k & \text{si } k \in [\![0, n]\!] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

## Exercice 11.8

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $P$ pour que l'application

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & P(z) \end{array} \right.$$

soit surjective.

**indication**

- Si $P$ est constant, l'application ne sera pas surjective.
- Si $P$ est non constant, utiliser le théorème de D'Alembert-Gauss.

**résultat**

$$z \longmapsto P(z) \text{ est surjective} \quad \Longleftrightarrow \quad P \text{ est non constant.}$$

## Exercice 11.9

Déterminer le noyau du morphisme d'anneaux

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P\left(1+\sqrt{2}\right). \end{array} \right.$$

**indication**

- Déterminer un polynôme à coefficients entiers dont $1+\sqrt{2}$ est racine (on peut éventuellement d'abord déterminer un polynôme dont $\sqrt{2}$ est racine).
- Utiliser le théorème de division euclidienne.

**résultat**

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \left\{(X^2 - 2X - 1)Q \ ; \ Q \in \mathbb{Z}[X]\right\}.$$

## Exercice 11.10

**Définition. Idéal d'un anneau commutatif.**
*Soit* $(A, +, \times)$ *un anneau commutatif. Soit* $\mathscr{I} \subset A$.
*On dit que* $\mathscr{I}$ *est un* idéal *de* $A$ *lorsque :*

- $(\mathscr{I}, +)$ *est un sous-groupe de* $(A, +)$ *;*
- $\forall a \in A, \quad \forall x \in \mathscr{I}, \quad a \times x \in \mathscr{I}$.

Montrer que tout idéal de $\mathbb{K}[X]$ est de la forme $P_0\mathbb{K}[X]$ où $P_0 \in \mathbb{K}[X]$.

***indication***

- Raisonner par double inclusion.
- On exploitera le théorème de division euclidienne.