Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025

William GREGORY

Colle 11

Polynômes, Calcul intégral

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mercredi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Calculs d'intégrales

Exercice 11.1

Calculer les intégrales

$$I := \int_0^{\pi/6} \frac{\cos^2(t)}{\cos(2t)} \,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J := \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2(t)}{\cos(2t)} \,\mathrm{d}t.$$

Exercice 11.2

Calculer

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}x.$$

Exercice 11.3

Calculer

$$\int_{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-(x-1)^2} \,\mathrm{d}x.$$

Exercice 11.4

Calculer

$$\int_0^1 \ln(1+t^2) \,\mathrm{d}t.$$

Exercice 11.5

Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on définit la fonction

$$f_{p,q} : \left| \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varepsilon & \longmapsto & \displaystyle\int_\varepsilon^1 t^p \ln(t)^q \,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

On note $I_{p,q} := \lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_{p,q}(\varepsilon)$.
Déterminer l'expression de $I_{p,q}$ en fonction de p et de q.

Polynômes

Exercice 11.6

Soit $P \coloneqq \mathrm{X}^3 + 3\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} - 1$.
On note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ses trois racines complexes.
Calculer $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant 3 \\ i \neq j}} \frac{\alpha_i}{\alpha_j}$.

Exercice 11.7

Soit $P \coloneqq a_0 + a_1\mathrm{X} + \cdots + a_n\mathrm{X}^n \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

1. Soit $r > 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\int_0^{2\pi} P(re^{it})e^{-ikt}\,\mathrm{d}t.$$

2. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \left|P(z)\right| \leqslant M.$$

Montrer que P est constant.

Exercice 11.8

Soit $P \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur P pour que l'application

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & P(z) \end{array}\right.$$

soit surjective.

Exercice 11.9

Déterminer le noyau du morphisme d'anneaux

$$\varphi : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P\big(1+\sqrt{2}\big). \end{array}\right.$$

Exercice 11.10

Définition. Idéal d'un anneau commutatif.
Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Soit $\mathscr{I} \subset A$.
On dit que $\mathscr{I}$ est un idéal *de A lorsque :*

- *$(\mathscr{I}, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$;*
- *$\forall a \in A, \quad \forall x \in \mathscr{I}, \quad a \times x \in \mathscr{I}$.*

Montrer que tout idéal de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est de la forme $P_0\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ où $P_0 \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.