Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025

William GREGORY

Colle 12 • INDICATIONS
Nombres réels, Calcul intégral

Exercice 12.1

1. Soit f une fonction continue sur $[0,\pi]$ à valeurs réelles vérifiant

$$\forall x \in [0,\pi], \quad f(\pi - x) = f(x).$$

Montrer que

$$\int_0^\pi x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

indication

1. Changement de variable $x = \pi - u$.

2. Utiliser la question précédente, reconnaître une dérivée en cherchant du côté de $\arctan(\cdots)$.

résultat

$$\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}.$$

Exercice 12.2

Déterminer la primitive de

$$x \longmapsto \frac{\arctan(x)}{x^2}$$

sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1.

indication

- Intégrer par parties.
- Déterminer $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $\displaystyle\frac{1}{x(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-\mathrm{i}} + \frac{c}{x+\mathrm{i}}$.

résultat

$$x \longmapsto \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan(x)}{x} + \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln(2).$$

Exercice 12.3

Déterminer la primitive qui s'annule en 0 de la fonction

$$x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \cosh\left(\frac{x}{2}\right)}{\cosh(x)}.$$

indication

Exprimer cosh avec les exponentielles et effectuer le changement de variable $x = \ln(t)$.

résultat

$$x \longmapsto \frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^{2x}+1) + \arctan(\mathrm{e}^{x}) - \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 12.4

Déterminer deux réels a et b tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\pi} (at + bt^2)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}.$$

indication

Procéder par double intégration par parties ou déterminer une relation de récurrence.

résultat

$$a = -1 \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{2\pi}.$$

Exercice 12.5

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
Exprimer $\max(x, y)$ et $\min(x, y)$ en fonction de x, y et $|x - y|$.

résultat

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

Exercice 12.6

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ bornée.
Montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \sup_{x \in A} |\lambda x| = |\lambda| \sup(A).$$

Exercice 12.7

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n \coloneqq \left\{ \dfrac{n}{k} + k \ ; \ k \in \mathbb{N}^* \right\}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- **(a)** Justifier l'existence de $m_n \coloneqq \inf E_n$.
- **(b)** Justifier que $m_n \geqslant 2\sqrt{n}$.
- **(c)** Préciser m_1.

2. Étudier l'existence et déterminer le cas échéant les valeurs de $\sup\limits_{k \in \mathbb{N}^*} m_k$ et $\inf\limits_{k \in \mathbb{N}^*} m_k$.

indication

1. **(b)** On peut étudier $f_n : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{n}{x} + x \end{array} \right.$, ou utiliser l'inégalité $2\sqrt{ab} \leqslant a + b$.

(c) Remarquer qu'il s'agit d'un minimum.

2. La suite $(m_k)_k$ est-elle majorée ? minorée ?

résultat

1. **(c)** $m_1 = 2$.

2. $\sup\limits_{k \in \mathbb{N}} m_k$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$ et $\inf\limits_{k \in \mathbb{N}^*} a_k = 2$.

Exercice 12.8

Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.

1. Déterminer $\sup(-A)$ où $-A \coloneqq \{-x \ ; \ x \in A\}$.

2. Déterminer $\sup(A + B)$ où $A + B \coloneqq \{x + y \ ; \ x \in A, y \in B\}$.