Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025

William GREGORY

Colle 13

Suites numériques

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mercredi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Exercice 13.1

Soient $p, q \in]0, 1[$.
Soient $a_0, a_1 \in]0, 1[$ tels que $a_0 + a_1 = 1$.

1. Déterminer le terme général de la suite $(p_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} p_0 := a_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} := (1 - p - q)p_n + q. \end{cases}$$

2. Déterminer le terme général de $(1 - p_n)_n$ en fonction de a_1.

3. On suppose que $|1 - p - q| < 1$. Déterminer les limites des suites

$$(p_n)_n \quad \text{et} \quad (1 - p_n)_n.$$

Exercice 13.2

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad (f \circ f)(x) = 6x - f(x).$$

Exercice 13.3

Montrer que la suite de terme général

$$u_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

(pour $n \in \mathbb{N}$) converge.

Exercice 13.4

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n := \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que $(u_n)_n$ converge.

2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2n} < \frac{u_n}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

3. Déterminer la limite de $(u_n)_n$.

Exercice 13.5

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n := \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \quad \text{et} \quad v_n := (n+1){u_n}^2.$$

Montrer que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 13.6

1. Montrer que

$$\forall x > 0,\ \ x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

2. Étudier la nature de la suite $(u_n)_n$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_n := \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

Exercice 13.7

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n(x) := \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2}.$$

Étudier la nature de $\big(u_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. Quelle propriété de $\mathbb{R}$ peut-on redémontrer à l'aide de **1.** ?

Exercice 13.8

Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\sigma \in \mathbb{R}$. Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ telle que

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = m^2 v_n + \sigma^2 m^n. \end{cases}$$

1. Déterminer le terme général de la suite $(v_n)_n$.

2. Soit $p \in]0,1[$. On prend $m = \dfrac{1-p}{p}$.

Déterminer la nature de $(v_n)_n$ en fonction de p.

Exercice 13.9

Soit $(u_n)_n \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \longrightarrow 0$.
Montrer que

$$\forall a > 1, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{u_{n-k}}{a^k} \longrightarrow 0.$$