Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025

William GREGORY

Colle 14 • INDICATIONS
Suites, comparaisons des suites

Exercice 14.1

Étudier la suite $(x_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = e^{x_n} - 1. \end{cases}$$

On pourra établir l'inégalité suivante :

$$\forall x \geqslant 0, \quad e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

indication

- Déterminer la monotonie de la suite.
- Distinguer les cas $x_0 \leqslant 0$ et $x_0 > 0$.
- Si $x_0 \leqslant 0$, le théorème de la limite monotone donne le résultat.
- Si $x_0 > 0$, établir que $x_{k+1} - x_k \geqslant \dfrac{{x_0}^2}{2}$, puis en déduire que $x_n \longrightarrow +\infty$.

Exercice 14.2

Soit $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n := 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \quad \text{et} \quad v_n := 2^n \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right).$$

Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes et déterminer leur limite.

indication

- On pourra exploiter les relations donnant $\sin(2a)$ et $\tan(2a)$.
- On a $\dfrac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$ (ou directement $\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$).

résultat

$$\lim u_n = \lim v_n = \theta.$$

Exercice 14.3

On admettra que, si $(\varepsilon_n)_n$ est une suite réelle telle que $\varepsilon_n \longrightarrow 0$, on a

$$\ln(1+\varepsilon_n) = \varepsilon_n - \frac{{\varepsilon_n}^2}{2} + o\left({\varepsilon_n}^2\right).$$

Soit $(u_n)_n \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. Montrer que

$$u_n = o\left(\sqrt{n}\right) \quad \Longrightarrow \quad \left(1+\frac{u_n}{n}\right)^n \sim e^{u_n}.$$

indication

On montre que $\left(1+\frac{u_n}{n}\right)^n e^{-u_n} \longrightarrow 1$. On pourra prendre $\varepsilon_n = \frac{u_n}{n}$ dans le développement admis.

Exercice 14.4

Déterminer le terme général et étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} u_0, u_1 \in \mathbb{R}_+^* \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \dfrac{2u_{n+1}u_n}{u_{n+1}+u_n}. \end{cases}$$

indication

On définit $v_n := \frac{1}{u_n}$ (dont on montre la bonne définition). On détermine le terme général de $(v_n)_n$ par les techniques classiques, sa limite, et on en déduit les résultats sur $(u_n)_n$.

résultat

$$v_n = \frac{2(v_0 - v_1)}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{v_0+2v_1}{3} \longrightarrow \frac{v_0+2v_1}{3}.$$

$$u_n = \frac{1}{v_n} \longrightarrow \frac{3u_0u_1}{2u_0+u_1}.$$

Exercice 14.5

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. On considère les suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ définies par

$$\begin{cases} a_0 := a \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 := b \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_nb_n}. \end{cases}$$

Montrer que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent, vers la même limite.

indication

- On commence par montrer que $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont correctement définies.
- L'inégalité arithmético-géométrique permet de comparer a_n et b_n, puis de donner la monotonie de $(a_n)_n$ et de $(b_n)_n$.
- Le théorème de la limite monotone assure la convergence des deux suites, puis un passage à la limite dans une relation donne le résultat.

Exercice 14.6

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \sim n!$.

indication

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{n!} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-2} k!$.

Exercice 14.7

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n := \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $u_n \longrightarrow 1$.

2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x.$$

3. En déduire que

$$u_n = 1 - \frac{\ln(2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

indication

1. Majorer $|u_n - 1|$ à l'aide de l'inégalité triangulaire intégrale.

2. Procéder par intégration par parties.

3. Montrer d'abord que $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \longrightarrow 0$ (à l'aide de $\ln(1+t) \leqslant t$) et remarquer que

$$u_n = 1 - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 14.8

On définit la suite $(u_n)_n$ par

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}. \end{cases}$$

1. Montrer que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n := \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.

(a) Montrer que $v_n \longrightarrow 1$.

(b) Montrer que

$$\frac{v_0 + \cdots + v_{n-1}}{n} \longrightarrow 1.$$

(c) En déduire un équivalent de u_n.

indication

1. Montrer que la suite est correctement définie et utiliser le théorème de la limite monotone.

2. **(a)** Utiliser que $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n$.

(b) Utiliser le théorème de Cesàro.

(c) $v_0 + \cdots + v_{n-1} = \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_0}$.

résultat

$$u_n \sim \frac{1}{n}.$$

Exercice 14.9

- *Soit A une partie de $\mathbb{R}$.*
- *On dit que $(u_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ est une* suite de Cauchy *lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m \geqslant N_\varepsilon, \quad |u_n - u_m| \leqslant \varepsilon.$$

- *On dit que A est* complet *lorsque toute suite $(u_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ de Cauchy converge dans A.*

1. **(a)** Montrer que la suite $\left(\dfrac{\lfloor n\sqrt{2} \rfloor}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy.

(b) Qu'en déduire sur $\mathbb{Q}$?

2. Soit $(u_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ une suite de A. Montrer que :

(a) si $(u_n)_n$ est de Cauchy, alors $(u_n)_n$ est bornée ;

(b) si $(u_n)_n$ est convergente, alors $(u_n)_n$ est de Cauchy.

3. Montrer que $\mathbb{R}$ est complet.