Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025
William GREGORY

Colle 15 • INDICATIONS
Matrices

Dans tous les exercices, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 15.1

Calculer le noyau de la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ -6 & 0 & 12 \\ 5 & 10 & -10 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$

résultat

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 15.2

Calculer le noyau de la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 & 2 \\ -7 & 5 & 21 & -14 \\ -3 & 4 & 9 & -6 \\ 6 & 1 & -18 & 12 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$$

résultat

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 15.3

On définit trois suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ par

$$\begin{cases} u_0, v_0, w_0 \in \mathbb{K} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = v_n - u_n \\ v_{n+1} = w_n - v_n \\ w_{n+1} = v_n - w_n. \end{cases} \end{cases}$$

Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, les expressions de u_n, v_n et w_n, en fonction de n, u_0, v_0 et w_0.

indication

On pose

$$X_n := \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

et on montre par récurrence que $X_n = A^n X_0$, où $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{K})$ indépendante de n.

résultat

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} u_n = (-2)^{n-1}(v_0 - w_0) + (-1)^n(u_0 - w_0) \\ v_n = (-2)^{n-1}(w_0 - v_0) \\ w_n = (-2)^{n-1}(v_0 - w_0). \end{cases}$$

Exercice 15.4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a, b \in \mathbb{K}$.
On pose

$$M := \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}).$$

Déterminer, lorsqu'elle est inversible, l'inverse de M, en fonction de M, I_n, a, b et n.

indication

Écrire $M = (a-b)\mathrm{I}_n + b\mathrm{J}$ où $\mathrm{J} := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, puis écrire M^2 selon M et I_n.

résultat

$$\begin{aligned} a = b \text{ ou } a + (n-1)b = 0 \quad &\Longrightarrow \quad M \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ a \neq b \text{ et } a + (n-1)b \neq 0 \quad &\Longrightarrow \quad M^{-1} = \frac{\big(2a + (n-2)b\big)\mathrm{I}_n - M}{(a-b)\big(a + (n-1)b\big)}. \end{aligned}$$

Exercice 15.5

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = 0_n$.
Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{Tr}\Big((A+B)^k\Big) = \mathrm{Tr}(A^k) + \mathrm{Tr}(B^k).$$

indication

Il s'agira de comprendre les termes intervenant dans le développement de $(A+B)^k$ et d'utiliser les propriétés de la trace (linéarité et $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$).
En formalisant, on peut écrire que $(A+B)^k = \displaystyle\sum_{f \in \mathscr{F}\left([\![1,k]\!],\{A,B\}\right)} f(1) \cdots f(k)$.

Exercice 15.6

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(A^\top A) = \mathrm{Ker}(A).$$

indication

- L'inclusion $\boxed{\supset}$ se fait sans difficulté.
- Pour $\boxed{\subset}$, on pourra d'abord établir que

$$\mathrm{Tr}(B^\top B) = 0 \quad \Longrightarrow \quad B = 0_n.$$

Exercice 15.7

On pose, pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{R}(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

1. Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.
Montrer que $\mathrm{R}(\theta_1)$ et $\mathrm{R}(\theta_2)$ commutent.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Calculer la matrice $\mathrm{R}(\theta)^n$.

indication

On utilisera les relations donnant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.

résultat

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}.$$

Exercice 15.8

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Résoudre l'équation en $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$

$$X = \mathrm{Tr}(X)A + B.$$

indication

On raisonnera par analyse-synthèse, en passant d'abord l'équation à la trace pour distinguer différents cas.

résultat

En notant $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation,

$$\begin{cases} \mathrm{Tr}(A) = 1, \mathrm{Tr}(B) \neq 0 & \Longrightarrow \quad \mathcal{S} = \varnothing \\ \mathrm{Tr}(A) = 1, \mathrm{Tr}(B) = 0 & \Longrightarrow \quad \mathcal{S} = \{\lambda A + B \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}\} \\ \mathrm{Tr}(A) \neq 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S} = \left\{ \dfrac{\mathrm{Tr}(B)}{1 - \mathrm{Tr}(A)} A + B \right\}. \end{cases}$$

Exercice 15.9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A + A^{-1} = \mathrm{I}_n.$$

Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$, $A^k + A^{-k}$.

indication

On commence par calculer $A^k + A^{-k} = (A^k + A^{-k})\mathrm{I}_n$ et, en posant $B_k = A^k + A^{-k}$, on détermine une relation de récurrence vérifiée par $(B_k)_k$.
On montre ensuite que $B_k = \lambda_k \mathrm{I}_n$ et on détermine λ_k à l'aide des techniques habituelles sur les suites.

résultat

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k + A^{-k} = 2\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)\mathrm{I}_n.$$

Exercice 15.10

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $A, B, C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que

$$\left.\begin{array}{l} AC = CA \\ AB - BA = C^\top \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad AB = BA.$$

indication

On multipliera la relation par C et on utilisera que $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$.