William GREGORY

Colle 15
Matrices

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mercredi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Dans tous les exercices, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 15.1

Calculer le noyau de la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ -6 & 0 & 12 \\ 5 & 10 & -10 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$

Exercice 15.2

Calculer le noyau de la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 & 2 \\ -7 & 5 & 21 & -14 \\ -3 & 4 & 9 & -6 \\ 6 & 1 & -18 & 12 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$$

Exercice 15.3

On définit trois suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ par

$$\begin{cases} u_0, v_0, w_0 \in \mathbb{K} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = v_n - u_n \\ v_{n+1} = w_n - v_n \\ w_{n+1} = v_n - w_n. \end{cases} \end{cases}$$

Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, les expressions de u_n, v_n et w_n, en fonction de n, u_0, v_0 et w_0.

Exercice 15.4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a, b \in \mathbb{K}$.
On pose

$$M := \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}).$$

Déterminer, lorsqu'elle est inversible, l'inverse de M, en fonction de M, I_n, a, b et n.

Exercice 15.5

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = 0_n$.
Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{Tr}\big((A+B)^k\big) = \mathrm{Tr}(A^k) + \mathrm{Tr}(B^k).$$

Exercice 15.6

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(A^\top A) = \mathrm{Ker}(A).$$

Exercice 15.7

On pose, pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{R}(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

1. Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.
Montrer que $\mathrm{R}(\theta_1)$ et $\mathrm{R}(\theta_2)$ commutent.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Calculer la matrice $\mathrm{R}(\theta)^n$.

Exercice 15.8

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Résoudre l'équation en $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$

$$X = \mathrm{Tr}(X)A + B.$$

Exercice 15.9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A + A^{-1} = \mathrm{I}_n.$$

Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$, $A^k + A^{-k}$.

Exercice 15.10

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $A, B, C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que

$$\left.\begin{array}{l} AC = CA \\ AB - BA = C^\top \end{array}\right\} \implies AB = BA.$$