William GREGORY

Colle 16 • INDICATIONS
Matrices, Espaces vectoriels

Exercice 16.1

Calculer le noyau de la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ -6 & 0 & 12 \\ 5 & 10 & -10 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$

résultat

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 16.2

Calculer le noyau de la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 & 2 \\ -7 & 5 & 21 & -14 \\ -3 & 4 & 9 & -6 \\ 6 & 1 & -18 & 12 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$$

résultat

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 16.3

Calculer l'inverse de la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

résultat

$$M^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16.4

Calculer l'inverse de la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

résultat

$$M^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} -3 & 7 & -1 \\ -3 & -1 & 7 \\ 9 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16.5

La famille

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}\right)$$

est-elle libre ou liée ?

résultat

La famille est libre dans $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{K})$.

Exercice 16.6

La famille

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

est-elle libre ou liée ?

résultat

La famille est libre dans $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{K})$.

Exercice 16.7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que

$$A \text{ et } B \text{ commutent} \quad \Longrightarrow \quad A \text{ et } B^{-1} \text{ commutent.}$$

indication

Écrire que $(AB)(AB)^{-1} = (AB)^{-1}AB = \mathrm{I}_n$.

Exercice 16.8

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que
$$\mathrm{Ker}(A^\top A) = \mathrm{Ker}(A).$$

2. Le résultat reste-t-il vrai si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$?

indication

1.
- ♦ L'inclusion $\boxed{\supset}$ se fait sans difficulté.
- ♦ Pour $\boxed{\subset}$, on pourra d'abord établir que
$$\mathrm{Tr}(B^\top B) = 0 \quad \Longrightarrow \quad B = 0_n.$$

2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$ fournit un contre-exemple.

En revanche, en notant $A = (a_{i,j})_{i,j}$ et $\overline{A} := (\overline{a_{i,j}})_{i,j}$, on a $\mathrm{Ker}(\overline{A}^\top A) = \mathrm{Ker}(A)$.

Exercice 16.9

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a, b \in \mathbb{K}$.
On pose $M := a\mathrm{I}_n + b\mathrm{J} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, où
$$\mathrm{J} := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}).$$

Déterminer, lorsqu'elle est inversible, l'inverse de M, en fonction de M, I_n, a, b et n.

résultat

$$a = 0 \text{ ou } a + nb = 0 \quad \Longrightarrow \quad M \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$
$$a \neq 0 \text{ et } a + nb \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad M^{-1} = \frac{(2a+nb)\mathrm{I}_n - M}{a(a+nb)}.$$

Exercice 16.10

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Résoudre l'équation en $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$
$$X = \mathrm{Tr}(X)A + B.$$

indication

On raisonnera par analyse-synthèse, en passant d'abord l'équation à la trace pour distinguer différents cas.

résultat

En notant $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation,

$$\begin{cases} \mathrm{Tr}(A) = 1, \mathrm{Tr}(B) \neq 0 & \Longrightarrow \quad \mathscr{S} = \varnothing \\ \mathrm{Tr}(A) = 1, \mathrm{Tr}(B) = 0 & \Longrightarrow \quad \mathscr{S} = \{\lambda A + B \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}\} \\ \mathrm{Tr}(A) \neq 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathscr{S} = \left\{ \dfrac{\mathrm{Tr}(B)}{1 - \mathrm{Tr}(A)} A + B \right\}. \end{cases}$$

Exercice 16.11

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que

$$A^2 = AA^\top \quad \Longrightarrow \quad A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}).$$

indication

On pourra montrer que $A - A^\top = 0_n$ à l'aide du critère

$$\mathrm{Tr}(M^\top M) = 0 \quad \Longrightarrow \quad M = 0_n.$$

Exercice 16.12

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts.
Montrer que la famille $\left(t \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda_k t}\right)_{1 \leqslant k \leqslant N}$ est libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

indication

Plusieurs approches sont possibles.

1. On peut raisonner par récurrence, dériver de façon à se ramener à l'hypothèse de récurrence en faisant une combinaison linéaire des deux relations obtenues.
2. On peut passer à la limite dans une relation judicieuse.

Exercice 16.13

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soient $\theta_1, \dots, \theta_N \in \mathbb{R}_+^*$ deux à deux distincts.
Montrer que la famille $\left(t \longmapsto \sin(\theta_k t)\right)_{1 \leqslant k \leqslant N}$ est libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

indication

On peut raisonner par récurrence, dériver deux fois de façon à se ramener à l'hypothèse de récurrence en faisant une combinaison linéaire des deux relations obtenues.