Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025

William GREGORY

Colle 16

Matrices, Espaces vectoriels

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mercredi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Exercices de calcul

Exercice 16.1

Calculer le noyau de la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ -6 & 0 & 12 \\ 5 & 10 & -10 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$

Exercice 16.2

Calculer le noyau de la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 & 2 \\ -7 & 5 & 21 & -14 \\ -3 & 4 & 9 & -6 \\ 6 & 1 & -18 & 12 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$$

Exercice 16.3

Calculer l'inverse de la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

Exercice 16.4

Calculer l'inverse de la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

Exercice 16.5

La famille

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} \right)$$

est-elle libre ou liée ?

Exercice 16.6

La famille

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

est-elle libre ou liée ?

Matrices

Exercice 16.7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que

$$A \text{ et } B \text{ commutent} \quad \Longrightarrow \quad A \text{ et } B^{-1} \text{ commutent.}$$

Exercice 16.8

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(A^\top A) = \mathrm{Ker}(A).$$

2. Le résultat reste-t-il vrai si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 16.9

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a, b \in \mathbb{K}$.
On pose $M := a\mathrm{I}_n + b\mathrm{J} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, où

$$\mathrm{J} := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}).$$

Déterminer, lorsqu'elle est inversible, l'inverse de M, en fonction de M, I_n, a, b et n.

Exercice 16.10

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Résoudre l'équation en $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$

$$X = \mathrm{Tr}(X)A + B.$$

Exercice 16.11

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que

$$A^2 = AA^\top \quad \Longrightarrow \quad A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}).$$

Espaces vectoriels

Exercice 16.12

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts.
Montrer que la famille $\left(t \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda_k t}\right)_{1 \leqslant k \leqslant N}$ est libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 16.13

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soient $\theta_1, \dots, \theta_N \in \mathbb{R}_+^*$ deux à deux distincts.
Montrer que la famille $\left(t \longmapsto \sin(\theta_k t)\right)_{1 \leqslant k \leqslant N}$ est libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.