Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025

William GREGORY

Colle 17 • INDICATIONS
Matrices, Espaces vectoriels

Exercice 17.1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(BX).$$

Que dire de A et B ?

indication

On pourra commencer par montrer que

$$\forall M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Tr}(M^\top M) = 0 \quad \Longrightarrow \quad M = 0_n.$$

résultat

Les matrices A et B commutent.

Exercice 17.2

Résoudre l'équation matricielle

$$X^2 = A$$

où $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

indication

On commencera par remarquer que toute solution commute avec A, puis l'on étudiera l'équation $AX = XA$ coefficients par coefficients.

résultat

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \textit{etc.}$$

Exercice 17.3

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.
On pose $\omega := \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$ et

$$A := \left(\omega^{(k-1)(\ell-1)}\right)_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

Montrer que A et est inversible et donner A^{-1}.

Indication. On pourra utiliser la matrice $\overline{A}$ contenant les conjugués des coefficients de A.

indication

Calculer $A\overline{A}$.

résultat

$$A\overline{A} = n\mathrm{I}_n \quad \text{donc} \quad A^{-1} = \frac{1}{n}\overline{A}.$$

Exercice 17.4

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.
2. Soient $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\mathrm{Tr}(S^\top A)$.

indication

1. Raisonner par analyse-synthèse.
2. Utiliser que $\mathrm{Tr}(M^\top) = \mathrm{Tr}(M)$.

Exercice 17.5

On considère les fonctions de $\mathscr{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} f_1 : x &\longmapsto \cos(x), & f_2 : x &\longmapsto x\cos(x), \\ f_3 : x &\longmapsto \sin(x), & f_4 : x &\longmapsto x\sin(x). \end{aligned}$$

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre dans $\mathscr{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$.

indication

On pourra évaluer en des valeurs stratégiques de x.

Exercice 17.6

Soit E un espace vectoriel.
Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de E.
Montrer que pour tout $a \in E \setminus \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, la famille $(e_1 + a, \dots, e_p + a)$ est libre.

indication

Obtenir la relation
$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = -(\lambda_1 + \cdots + \lambda_p)a,$$
et discuter suivant le coefficient devant a.

Exercice 17.7

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $f_\lambda : x \longmapsto |x - \lambda|$.
Montrer que la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

indication

On peut raisonner par l'absurde et étudier la dérivabilité.

Exercice 17.8

Soit E un espace vectoriel. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$.

1. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ avec $\lambda \neq \mu$.
   Soient $x, y \in E \setminus \{0_E\}$ tels que
   $$f(x) = \lambda x \quad \text{et} \quad f(y) = \mu y.$$
   Montrer que (x, y) est libre.
2. Généraliser.

indication

1. On écrira deux relations pour montrer que l'un des scalaires est nul, puis l'autre.
2. Raisonner par récurrence.

Exercice 17.9

On note $E \coloneqq \mathscr{C}^0\big([0,1], \mathbb{R}\big)$ et
$$F \coloneqq \left\{ f \in E \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}.$$

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans E.

indication

1. Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de E à la main ou (si on connaît la définition) en vérifiant qu'il s'agit d'un hyperplan de E.
2. Écrire que $f = f - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ et montrer que $E = F \oplus G$ où G désigne le sous-espace des fonctions de E constantes.

Exercice 17.10

Soit E un espace vectoriel.
Soient $V \coloneqq a + F$ et $W \coloneqq b + G$ deux sous-espaces affines de E.
Montrer que

$$V \cap W \neq \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad b - a \in F + G.$$