Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025

William GREGORY

Colle 17

Matrices, Espaces vectoriels

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant vendredi midi.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Matrices

Exercice 17.1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(BX).$$

Que dire de A et B ?

Exercice 17.2

Résoudre l'équation matricielle

$$X^2 = A$$

où $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

Exercice 17.3

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.
On pose $\omega := \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$ et

$$A := \left(\omega^{(k-1)(\ell-1)}\right)_{1 \leqslant k, \ell \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

Montrer que A et est inversible et donner A^{-1}.

Indication. On pourra utiliser la matrice $\overline{A}$ contenant les conjugués des coefficients de A.

Exercice 17.4

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.

2. Soient $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\mathrm{Tr}(S^\top A)$.

Espaces vectoriels

Exercice 17.5

On considère les fonctions de $\mathscr{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} f_1 : x &\longmapsto \cos(x), \quad & f_2 : x &\longmapsto x\cos(x), \\ f_3 : x &\longmapsto \sin(x), \quad & f_4 : x &\longmapsto x\sin(x). \end{aligned}$$

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre dans $\mathscr{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$.

Exercice 17.6

Soit E un espace vectoriel.
Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de E.
Montrer que pour tout $a \in E \setminus \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, la famille $(e_1 + a, \dots, e_p + a)$ est libre.

Exercice 17.7

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $f_\lambda : x \longmapsto |x - \lambda|$.
Montrer que la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 17.8

Soit E un espace vectoriel. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$.

1. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ avec $\lambda \neq \mu$.
   Soient $x, y \in E \setminus \{0_E\}$ tels que
   $$f(x) = \lambda x \quad \text{et} \quad f(y) = \mu y.$$
   Montrer que (x, y) est libre.
2. Généraliser.

Exercice 17.9

On note $E := \mathscr{C}^0\big([0, 1], \mathbb{R}\big)$ et

$$F := \left\{ f \in E \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}.$$

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans E.

Exercice 17.10

Soit E un espace vectoriel.
Soient $V := a + F$ et $W := b + G$ deux sous-espaces affines de E.
Montrer que

$$V \cap W \neq \varnothing \iff b - a \in F + G.$$