Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025

William GREGORY

Colle 19 • INDICATIONS
Algèbre linéaire générale

Exercice 19.1

Soit E un espace vectoriel. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$.

1. Montrer que $\left(\mathrm{Ker}(f^n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.

2. Soit $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(f^{k_0}) = \mathrm{Ker}(f^{k_0+1})$. Montrer que

$$\forall k \geqslant k_0, \quad \mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k_0}).$$

3. Donner un espace E et un endomorphisme f dont la suite $\left(\mathrm{Ker}(f^n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante mais non stationnaire.

indication

1. Sans difficulté.

2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \ \mathrm{Ker}(f^{k_0+k+1}) = \mathrm{Ker}(f^{k_0+k})$.

3. On peut par exemple se placer dans $E = \mathbb{K}[X]$.

Exercice 19.2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que

$$A^2 = AA^\top \quad \Longrightarrow \quad A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}).$$

indication

On pourra montrer que $A - A^\top = 0_n$ à l'aide du critère

$$\mathrm{Tr}(M^\top M) = 0 \quad \Longrightarrow \quad M = 0_n.$$

Exercice 19.3

Soit E un espace vectoriel. Soient $f \in \mathrm{L}(E)$. Soit $p \geqslant 2$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts tels que, pour $i \in [\![1, p]\!]$, on a $\mathrm{E}_i := \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \,\mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$. Montrer que les E_i sont en somme directe.

indication

Comprendre que

$$x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \,\mathrm{Id}_E) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = \lambda_i x$$

et raisonner par récurrence.

Exercice 19.4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit $u \in \mathrm{L}(E)$ tel que

$$u^2 - 6u - 7\,\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}.$$

1. Montrer que u est bijectif et exprimer u^{-1} en fonction de u.

2. Montrer que

$$E = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - 7\,\mathrm{Id}_E).$$

indication

1. Déterminer v tel que $u \circ v = v \circ u = \mathrm{Id}_E$ à l'aide de la relation vérifiée par u.

2. Raisonner par analyse synthèse. En exprimant $x \in E$ comme $x = y + z$ (avec $y \in \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$ et $z \in \mathrm{Ker}(u - 7\,\mathrm{Id}_E)$), écrire $f(x)$ pour en déduire y et z en fonction de x et $f(x)$.

Exercice 19.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ *nilpotente*, *i.e.* telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0_n$.
Montrer que $N - \mathrm{I}_n$ est inversible et déterminer son inverse.

indication

Calculer $(\mathrm{I}_n - N)\displaystyle\sum_{k=0}^{p_0-1} N^k$ où p_0 désigne l'indice de nilpotence de N (le plus petit entier k tel que $N^k = 0_n$).

résultat

$$(\mathrm{I}_n - N)^{-1} = \sum_{k=0}^{p_0-1} N^k$$

où p_0 désigne l'indice de nilpotence de N.

Exercice 19.6

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\mathrm{Vect}\Big(x \longmapsto \cos(nx)\Big)_{n \in [\![0,N]\!]} = \mathrm{Vect}\Big(x \longmapsto \cos^n(x)\Big)_{n \in [\![0,N]\!]}.$$

indication

- $\boxed{\subset}$ Penser à la formule de Moivre et au binôme de Newton, puis passer à la partie réelle.
- $\boxed{\supset}$ Exprimer $\cos^n(x)$ à l'aide de la formule d'Euler et du binôme de Newton et passer à la partie réelle.

Exercice 19.7

Soit $n \geqslant 2$. On considère

$$\varphi : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \\ P & \longmapsto & (\mathrm{X}+2)P(\mathrm{X}) - \mathrm{X}P(\mathrm{X}+1). \end{array} \right.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme.

2. Déterminer le noyau de φ.

indication

1. Il faut vérifier que l'application est correctement définie, *i.e.* est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

2. Établir qu'un polynôme du noyau admet 0 et -1 comme racines (en évaluant en $\mathrm{X} = -1$ et $\mathrm{X} = 0$).

résultat

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}\Big(\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)\Big).$$

Exercice 19.8

On note $E := \mathscr{C}^0\Big([0,1], \mathbb{R}\Big)$ et

$$F := \left\{ f \in E \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}.$$

1. Montrer que F est un espace vectoriel.

2. Déterminer un supplémentaire de F dans E.

indication

1. Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de E à la main ou (si on connaît la définition) en vérifiant qu'il s'agit d'un hyperplan de E.

2. Écrire que $f = f - \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ et montrer que $E = F \oplus G$ où G désigne le sous-espace des fonctions de E constantes.

Exercice 19.9

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Déterminer l'ensemble

$$\mathrm{C}(E) := \Big\{ u \in \mathrm{L}(E) \;\Big|\; \forall v \in \mathrm{L}(E),\;\; u \circ v = v \circ u \Big\}.$$

On pourra admettre que tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire.

indication

Raisonner par analyse-synthèse. En se donnant $u \in \mathrm{C}(E)$, on peut considérer $x \neq 0_E$ et $D := \mathrm{Vect}(x)$. En notant S un supplémentaire de D, on peut considérer la projection sur D parallèlement à S, dans l'objectif de montrer que $(x, u(x))$ est liée. On montre ensuite que u est une homothétie.

résultat

$$C(E) = \{\lambda \operatorname{Id}_E \quad | \quad \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Exercice 19.10

- *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$.
- *On note* $F := \left\{\varphi \in \mathscr{C}^\infty\big([a,b],\mathbb{R}\big) \quad \Big| \quad \varphi(a) = \varphi(b) = 0\right\}$.
- *On pose, pour* $f \in \mathscr{C}^0\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ *et* $\varphi \in F$, $\langle f \,|\, \varphi\rangle := \displaystyle\int_a^b f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

Soit $u \in \mathscr{C}^0\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ telle que

$$\forall \varphi \in F, \quad \int_a^b u'(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

1. Montrer que $\operatorname{Ker}\big(\langle \mathbb{1}_{[a,b]} \mid \cdot\rangle\big) \subset \operatorname{Ker}\big(\langle u \,|\, \cdot\rangle\big)$.

2. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \varphi \in F, \quad \int_a^b u(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$