Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025

William GREGORY

Colle 20 • INDICATIONS

Limites et comparaisons, Continuité

Exercice 20.1

1. Montrer que $\cos(\cdot)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

2. Quel résultat plus général peut-on établir pour des fonctions périodiques ?

indication

1. Utiliser deux suites qui convergent vers $+\infty$ et aboutir à une contradiction avec la caractérisation séquentielle de la limite et l'unicité de la limite.

2. De la même manière, établir qu'une fonction périodique non constante n'admet pas de limite en $\pm\infty$.

Exercice 20.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $x \longmapsto \dfrac{x^{n-1}(x^n - 1)}{x - 1}$ est prolongeable par continuité en 1.

indication

On a $x^n - 1 = \dots$. Il s'agit alors de passer à la limite.

Exercice 20.3

Que dire de deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues coïncidant sur une partie dense de $\mathbb{R}$? Le démontrer.

indication

Les fonctions f et g sont égales sur $\mathbb{R}$. On utilisera la caractérisation séquentielle de la continuité.

Exercice 20.4

Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue admettant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$? Le démontrer.

indication

La fonction f est bornée. À l'aide de la définition de la limite en $+\infty$ et $-\infty$, on étudiera f sur trois intervalles $]\infty, a]$, $[a, b]$ et $[b, +\infty[$ et le théorème des bornes atteintes.

Exercice 20.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de solutions de l'équation

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \cdots + \frac{1}{x+2n} = 1.$$

indication

Appliquer le théorème de la bijection monotone à $x \longmapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \cdots + \frac{1}{x+2n} - 1$ sur des intervalles judicieusement choisis, dresser le tableau de variations et compter.

résultat

L'équation admet $2n+1$ solutions.

Exercice 20.6

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
Montrer que

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n}\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow \ell.$$

indication

En notant $v_n := \frac{1}{n}\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow \ell$, écrire $v_n - \ell$ comme une intégrale et couper en deux morceaux suivant la définition de $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$.

Exercice 20.7

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \lim_{x \to +\infty} \left|f(x)\right| = \lim_{x \to -\infty} \left|f(x)\right| = +\infty\,; \\ \text{(ii)} & \forall [a,b] \subset \mathbb{R}, \quad f^{\langle -1 \rangle}\left[[a,b]\right] \text{ est bornée.} \end{array}$$

indication

Utiliser les définitions mises en jeu dans les assertions considérées.

Exercice 20.8

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [0,1]$ telle que

$$\begin{cases} f \text{ est continue à droite en } 0 \\ f(0) = 1 \\ \forall s, t \geqslant 0, \quad f(s+t) = f(s)f(t). \end{cases}$$

Montrer qu'il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que

$$\forall t \geqslant 0, \quad f(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

indication

- Étudier le cas $t = s$ et en déduire par récurrence $f(nt)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- En déduire $f\left(\frac{1}{n}\right)$ puis $f\left(\frac{n}{m}\right)$ en fonction de $f(1)$.
- En déduire f sur $\mathbb{Q}_+$ puis sur $\mathbb{R}_+$ par continuité-densité.

Exercice 20.9

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique.

1. Montrer que f est bornée et atteint ses bornes.

2. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

indication

1. Théorème des bornes atteintes.

2. Utiliser le théorème de Heine sur un segment un peu plus grand qu'une période (par exemple $[-T, 2T]$) et translater le problème.

Exercice 20.10

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.

1. Montrer que

$$\exists a, b \in \mathbb{R} : \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \; f(x) \leqslant ax + b.$$

2. Les fonctions polynomiales de degré 2 sont-elles uniformément continues sur $\mathbb{R}_+$?

indication

1. Utiliser la définition de la continuité uniforme avec $\varepsilon = 1$ et, avec l'inégalité triangulaire, majorer $|f(x) - f(0)|$ en utilisant que

$$f(x) - f(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{(k+1)x}{n}\right) - f\left(\frac{kx}{n}\right) \right)$$

où n est choisi judicieusement.

2. Écrire la contraposée de la question précédente.