Colle 20

Limites et comparaisons, Continuité

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mardi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Exercice 20.1

1. Montrer que $\cos(\cdot)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

2. Quel résultat plus général peut-on établir pour des fonctions périodiques ?

Exercice 20.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $x \longmapsto \dfrac{x^{n-1}(x^n - 1)}{x - 1}$ est prolongeable par continuité en 1.

Exercice 20.3

Que dire de deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues coïncidant sur une partie dense de $\mathbb{R}$? Le démontrer.

Exercice 20.4

Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue admettant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$? Le démontrer.

Exercice 20.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de solutions de l'équation

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \cdots + \frac{1}{x+2n} = 1.$$

Exercice 20.6

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
Montrer que

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n} \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow \ell.$$

Exercice 20.7

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim_{x\to+\infty} \left|f(x)\right| = \lim_{x\to-\infty} \left|f(x)\right| = +\infty$;

(ii) $\forall [a,b] \subset \mathbb{R},\ \ f^{\langle -1\rangle}\big[[a,b]\big]$ est bornée.

Exercice 20.8

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [0,1]$ telle que

$$\begin{cases} f \text{ est continue à droite en } 0 \\ f(0) = 1 \\ \forall s,t \geqslant 0,\ \ f(s+t) = f(s)f(t). \end{cases}$$

Montrer qu'il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que

$$\forall t \geqslant 0, \quad f(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

Exercice 20.9

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique.

1. Montrer que f est bornée et atteint ses bornes.

2. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20.10

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.

1. Montrer que

$$\exists a,b \in \mathbb{R} : \quad \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ f(x) \leqslant ax + b.$$

2. Les fonctions polynomiales de degré 2 sont-elles uniformément continues sur $\mathbb{R}_+$?