William GREGORY

Colle 21

Dérivation

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mardi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Exercice 21.1

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ dérivable.
Montrer que

$$\exists c \in \,]a, b[: \quad \frac{f(b)}{f(a)} = \mathrm{e}^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}.$$

Exercice 21.2

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ dérivable. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
Montrer que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(x+1)}{f(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \mathrm{e}^{\ell}.$$

Exercice 21.3

Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
On suppose que

$$\forall x \in [a, b], \quad g'(x) \neq 0.$$

1. Soit $x > x_0$. Montrer que

$$\exists c \in \,]x, x_0[: \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

2. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell.$$

Exercice 21.4

Soit $h > 0$. Soit $f : [-h, h] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^5$. Montrer que

$$\exists c \in \,]-h, h[: \quad f(h) - f(-h) = \frac{h}{3}\big(f'(-h) + 4f'(0) + f'(h)\big) - \frac{h^5}{90} f^{(5)}(c).$$

Exercice 21.5

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(4 - {u_n}^2). \end{cases}$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 21.6

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}. \end{cases}$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 21.7

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall x \in [a, b], \quad f'(x) > 0.$$

Montrer que

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} : \quad \forall x \in [a, b], \quad f(x) \geqslant \alpha x + \beta.$$

Exercice 21.8

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
Soit $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \ell \\ f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell. \end{cases}$$

Montrer que

$$\exists c \in \mathbb{R} : \quad f'(c) = 0.$$

Exercice 21.9

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que

$$\begin{cases} f(a) = f(b) = 0 \\ f'(a) = f'(b) = 0. \end{cases}$$

Montrer que

$$\exists c \in \,]a, b[: \quad f(c) = f''(c).$$