Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025
William GREGORY

Colle 22 • INDICATIONS

Dérivation, Formules de Taylor, Développements limités

Exercice 22.1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}. \end{cases}$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

indication

On note $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$.

- Rechercher les points fixes de f, un intervalle stable de f au regard de u_0 et garder le point fixe ℓ de cet intervalle stable.
- À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| \leqslant k|u_n - \ell|$$

où $k \in \,]0,1[$ et en déduire la convergence de $(u_n)_n$ vers ℓ.

résultat

L'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ est stable par f. On a $u_n \longrightarrow \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 22.2

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ dérivable. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
Montrer que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(x+1)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \mathrm{e}^{\ell}.$$

indication

On pourra considérer $g : x \longmapsto \ln(f(x))$ et utiliser le théorème des accroissements finis.

Exercice 22.3

Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
On suppose que
$$\forall x \in [a, b], \quad g'(x) \neq 0.$$

1. Soit $x > x_0$. Montrer que
$$\exists c \in]x, x_0[: \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

2. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell.$$

indication

1.
- On vérifiera d'abord que $g(a) \neq g(b)$ pour justifier le sens de l'expression proposée.
- On appliquera le théorème de Rolle à une fonction h bien choisie, construite à l'aide de f et g.

2. On remarquera que le c précédemment construit dépend de x. Lorsque x tend vers x_0, c aussi.

Exercice 22.4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Soit $a \in I$.
Montrer que pour tout $x \in I$, il existe $c_x \in \mathbb{R}$ compris entre a et x tel que
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + f^{(n+1)}(c_x)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

indication

Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral et encadrer l'intégrale par des valeurs de la dérivée $(n+1)$-ième pour appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 22.5

Soit $u \in \mathscr{C}^4\big([0,1], \mathbb{R}\big)$. Soit f une fonction réelle telle que
$$\forall x \in [0,1], \quad -u''(x) = f(x).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $h := \dfrac{1}{n+1}$ et, pour $i \in [\![0, n+1]\!]$, $x_i := ih$.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Comment approximer $f(x_i)$ avec $u(x_{i-1})$, $u(x_i)$ et $u(x_{i+1})$?

2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Définir l'erreur d'approximation ε_i.

3. Déterminer $C \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que de u tel que
$$\forall \imath \in [\![1, n]\!], \quad |\varepsilon_i| \leqslant Ch^2.$$

indication

1. Utiliser la formule de Taylor-Young.
2. Il s'agit de la différence entre $f(x_i)$ et l'approximation déterminée précédemment.
3. On utilisera la formule de Taylor reste intégral aux points (x_{i+1}, x_i) et (x_{i-1}, x_i).

résultat

1. $\dfrac{-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1})}{h^2}$.
2. $\varepsilon_i = \dfrac{-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1})}{h^2} - f(x_i)$.
3. $C = \dfrac{\sup_{x\in[0,1]} \left|u^{(4)}(x)\right|}{12}$.

Exercice 22.6

Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner le développement limité en 0 à l'ordre $2n+2$ de $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

indication

On pourra commencer par dériver la fonction proposée.

résultat

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \cdots + \frac{2}{2n+1}x^{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right).$$

Exercice 22.7

Donner le développement limité à l'ordre 3 en 1 de $\cos \circ \ln$.

résultat

$$\cos\big(\ln(x)\big) = 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{2} + \underset{x\to 1}{o}\left((x-1)^3\right).$$

Exercice 22.8

Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner le développement limité de $\arcsin(\cdot)$ en 0 à l'ordre $2n+2$.

indication

Donner le développement limité en 0 à l'ordre $2n+1$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ puis intégrer.

résultat

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}x^{2k} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\arcsin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}(2k+1)(k!)^2} x^{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right).$$

Exercice 22.9

On considère la fonction

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le développement limité à l'ordre n de f en 0.

indication

1. On montrera que f est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ en étudiant $f^{(k)}$ en 0.

2. On peut alors appliquer la formule de Taylor-Young.