Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025

William GREGORY

Colle 22

Dérivation, Formules de Taylor, Développements limités

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mardi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Dérivation

Exercice 22.1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}. \end{cases}$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 22.2

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ dérivable. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(x+1)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \mathrm{e}^{\ell}.$$

Exercice 22.3

Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
On suppose que

$$\forall x \in [a,b], \quad g'(x) \neq 0.$$

1. Soit $x > x_0$. Montrer que

$$\exists c \in \,]x, x_0[\, : \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

2. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell.$$

Formules de Taylor

Exercice 22.4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Soit $a \in I$. Montrer que pour tout $x \in I$, il existe $c_x \in \mathbb{R}$ compris entre a et x tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + f^{(n+1)}(c_x)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exercice 22.5

Soit $u \in \mathscr{C}^4\big([0,1], \mathbb{R}\big)$. Soit f une fonction réelle telle que

$$\forall x \in [0,1], \quad -u''(x) = f(x).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $h := \dfrac{1}{n+1}$ et, pour $i \in [\![0, n+1]\!]$, $x_i := ih$.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Comment approximer $f(x_i)$ avec $u(x_{i-1})$, $u(x_i)$ et $u(x_{i+1})$?

2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Définir l'erreur d'approximation ε_i.

3. Déterminer $C \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que de u tel que

$$\forall \imath \in [\![1, n]\!], \quad |\varepsilon_i| \leqslant Ch^2.$$

Développements limités

Exercice 22.6

Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner le développement limité en 0 à l'ordre $2n+2$ de $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 22.7

Donner le développement limité à l'ordre 3 en 1 de $\cos \circ \ln$.

Exercice 22.8

Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner le développement limité de $\arcsin(\cdot)$ en 0 à l'ordre $2n+2$.

Exercice 22.9

On considère la fonction

$$f : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le développement limité à l'ordre n de f en 0.