Colle 23 • INDICATIONS

Développements limités, Dénombrement, E.D.L. 1

Exercice 23.1

Déterminer $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\pi \coth\left(\pi\sqrt{\varepsilon}\right)}{2\sqrt{\varepsilon}} - \dfrac{1}{2\varepsilon}$.

indication

On fera un développement limité à l'ordre 3 de $\cosh(x)$ et $\sinh(x)$ en 0.

résultat

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\pi \coth\left(\pi\sqrt{\varepsilon}\right)}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{1}{2\varepsilon} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 23.2

Soit $p \in]0,1[$. Soit $t \in \mathbb{R}$.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\frac{p}{n}e^{i\frac{t}{n}}}{1-\left(1-\frac{p}{n}\right)e^{i\frac{t}{n}}}$.

indication

On fera un développement limité des exponentielles.

résultat

$$\frac{\frac{p}{n}e^{i\frac{t}{n}}}{1-\left(1-\frac{p}{n}\right)e^{i\frac{t}{n}}} \longrightarrow \frac{p}{p-it}.$$

Exercice 23.3

Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner le développement limité de $\arcsin(\cdot)$ en 0 à l'ordre $2n+2$.

indication

Donner le développement limité en 0 à l'ordre $2n+1$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ puis intégrer.

résultat

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\arcsin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}(2k+1)(k!)^2} x^{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right).$$

Exercice 23.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_0, \dots, x_n \in [0,1]$.
Montrer que

$$\exists (i,j) \in [\![0,n]\!]^2 : \quad \begin{cases} i \neq j \\ |x_i - x_j| \leqslant \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

indication

En écrivant $[0,1]$ comme union disjointe de n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$, le principe des tiroirs permet d'affirmer que deux éléments se trouvent dans le même intervalle.

Exercice 23.5

Soit E un ensemble fini.
Combien de couples $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$ peut-on former ?

indication

On pourra commencer par compter de tels couples à $|B|$ fixé. On sommera ensuite.

résultat

On peut en former $3^{|E|}$.

Exercice 23.6

Soient $m, n, p \in \mathbb{N}$.
Calculer, en justifiant à l'aide d'arguments combinatoires, la somme

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k}.$$

résultat

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}.$$

Exercice 23.7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant 2$. Combien d'applications $f : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!]$ telles que $f(1) = f(2)$ peut-on construire ?

indication

On peut calculer le cardinal de $\{f : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!] \quad | \quad f(1)=f(2)\}$ ou de son complémentaire $\{f : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!] \quad | \quad f(1)\neq f(2)\}$, en comptant, pour chaque $f(k)$ le nombre de choix possibles.

résultat

$$\left|\left\{f : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!] \quad \middle| \quad f(1)=f(2)\right\}\right| = n^{n-1}.$$

Exercice 23.8

Soit $n\in\mathbb{N}$. Soient $A,B\in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad (A+B)^k=\sum_{f\in\mathscr{F}([\![1,k]\!],\{A,B\})} f(1)\cdots f(k).$$

indication

On raisonnera par récurrence sur k. On pourra utiliser que $\left|\mathscr{F}([\![1,k]\!],\{A,B\})\right| = 2^k$.

Exercice 23.9

Résoudre, sur $]0,+\infty[$,

$$y'-\left(2x-\frac{1}{x}\right)y=1.$$

résultat

$$\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & -\dfrac{1}{2x}+\lambda\dfrac{1}{x}\exp(x^2)\end{array}\right. \quad ; \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Exercice 23.10

Soit $k\in\mathbb{N}$. Résoudre

$$y'-y=x^k\mathrm{e}^x.$$

résultat

$$\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \left(\dfrac{x^{k+1}}{k+1}+\lambda\right)\mathrm{e}^x\end{array}\right. \quad ; \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Exercice 23.11

Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases}(1+t^2)y'=2ty+5(1+t^2)\\ y(1)=\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

résultat

$$t \longmapsto \frac{\pi}{5}(t^2+1) + 5\arctan(t)(t^2+1).$$

Exercice 23.12

On considère l'équation différentielle

$$xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2}.$$

1. Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

2. Cette équation admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$?

résultat

1.

$$S_{\mathbb{R}_+^*} = \left\{ \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\lambda}{x^2} + \dfrac{x-\arctan(x)}{x^2} \end{array} \right. \; ; \; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S_{\mathbb{R}_-^*} = \left\{ \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mu}{x^2} + \dfrac{x-\arctan(x)}{x^2} \end{array} \right. \; ; \; \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Sur $\mathbb{R}$, l'équation admet une unique solution :

$$x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x-\arctan(x)}{x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Exercice 23.13

Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{i}\mathbb{Z}$. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, 2π-périodique.
On désigne par g une solution de l'équation différentielle

$$y' + \alpha y = f.$$

1. Montrer que

$$g \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \quad \iff \quad g(2\pi) = g(0).$$

2. En déduire que l'équation différentielle considérée admet une unique solution 2π-périodique.

indication

1. On montrera que les fonctions g et $g(\cdot + 2\pi)$ sont égales en montrant qu'elles vérifient le même problème de Cauchy.

2. Pour l'existence, on commencera par établir la formule générale de la solution g.