Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025
William GREGORY

Colle 23

Développements limités, Dénombrement, E.D.L. 1

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant vendredi midi.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Développements limités

Exercice 23.1

Déterminer $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\pi \coth\left(\pi\sqrt{\varepsilon}\right)}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{1}{2\varepsilon}$.

Exercice 23.2

Soit $p \in]0,1[$. Soit $t \in \mathbb{R}$.

Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{p}{n} e^{i\frac{t}{n}}}{1 - \left(1 - \frac{p}{n}\right) e^{i\frac{t}{n}}}$.

Exercice 23.3

Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner le développement limité de $\arcsin(\cdot)$ en 0 à l'ordre $2n+2$.

Dénombrement

Exercice 23.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_0, \dots, x_n \in [0,1]$.
Montrer que

$$\exists (i,j) \in [\![0,n]\!]^2 : \quad \begin{cases} i \neq j \\ |x_i - x_j| \leqslant \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Exercice 23.5

Soit E un ensemble fini.
Combien de couples $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$ peut-on former ?

Exercice 23.6

Soient $m, n, p \in \mathbb{N}$.
Calculer, en justifiant à l'aide d'arguments combinatoires, la somme

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \binom{m}{p-k}.$$

Exercice 23.7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant 2$. Combien d'applications $f : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!]$ telles que $f(1) = f(2)$ peut-on construire ?

Exercice 23.8

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (A+B)^k = \sum_{f \in \mathscr{F}([\![1,k]\!],\{A,B\})} f(1) \cdots f(k).$$

Équations différentielles d'ordre 1

Exercice 23.9

Résoudre, sur $]0, +\infty[$,

$$y' - \left(2x - \frac{1}{x}\right)y = 1.$$

Exercice 23.10

Soit $k \in \mathbb{N}$. Résoudre

$$y' - y = x^k \mathrm{e}^x.$$

Exercice 23.11

Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} (1+t^2)y' = 2ty + 5(1+t^2) \\ y(1) = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Exercice 23.12

On considère l'équation différentielle

$$xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2}.$$

1. Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

2. Cette équation admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$?

Exercice 23.13

Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{i}\mathbb{Z}$. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, 2π-périodique.
On désigne par g une solution de l'équation différentielle

$$y' + \alpha y = f.$$

1. Montrer que

$$g \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \quad \Longleftrightarrow \quad g(2\pi) = g(0).$$

2. En déduire que l'équation différentielle considérée admet une unique solution 2π-périodique.