William GREGORY

Colle 24 • INDICATIONS

Équations différentielles, Probabilités, Séries numériques

Exercice 24.1

Soient $a \neq 0$ et $b, c \in \mathbb{R}$.
Résoudre, sur $]0, +\infty[$, l'équation

$$at^2y'' + bty' + cy = 0.$$

Indication. Déterminer une équation vérifiée par z où $y = z \circ \ln$.

indication

Si z est telle que $y = z \circ \ln$, z vérifie $az'' + (b-a)z' + cz = 0$.

résultat

On note $P := a\mathrm{X}^2 + (b-a)\mathrm{X} + c$ et $\Delta := (b-a)^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, en notant $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tels que $P(r_1) = P(r_2) = 0$, on a

$$y(t) = At^{r_1} + Bt^{r_2} \quad ; \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

- Si $\Delta = 0$, en notant r_0 tel que $P(r_0) = 0$, on a

$$y(t) = \Big(A\ln(t) + B\Big)t^{r_0} \quad ; \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

- Si $\Delta < 0$, en posant $r_0 := \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{b}{a}\right)$ et $s := \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$, on a

$$y(t) = \Big(A\cos\big(s\ln(t)\big) + B\sin\big(s\ln(t)\big)\Big)t^{r_0} \quad ; \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Exercice 24.2

Soit I un intervalle. Soient $a, b > 0$.
Déterminer l'ensemble des solutions de

$$\begin{cases} y > 0 \text{ sur } I \\ y' = (a - by)y. \end{cases}$$

Indication. Déterminer une équation vérifiée par $z := \dfrac{1}{y}$.

résultat

$$\left\{ t \longmapsto \frac{\lambda}{1+\mu e^{-at}} \ ; \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 24.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements mutuellement indépendants.
On note B l'événement « aucun des A_k n'est réalisé ».
Montrer que

$$\mathbb{P}(B) \leqslant \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \right).$$

indication

On a, pour $x \in \mathbb{R}$, $1 - x \leqslant e^{-x}$.

Exercice 24.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une classe de n élèves organise un Noël canadien : chaque élève apporte un cadeau emballé et indistinguable des autres.

1. Déterminer la probabilité p_n qu'au moins un élève reçoive le cadeau qu'il a apporté.

2. Montrer que $p_n \longrightarrow 1 - \dfrac{1}{e}$.

indication

1. La « formule du crible » peut servir :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n]\!] \\ |J|=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i \right).$$

Le calcul de $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i \right)$ peut se faire avec la formule des probabilités composées ou, de manière plus formelle, en travaillant dans S_n (ensemble des bijections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$).

2. Utiliser les formules de Taylor.

Exercice 24.5 Chaîne de Markov à deux états.

On considère deux états A et B et une particule se déplaçant entre ces deux états.
On note :

- A_n l'événement « la particule est en A à la n-ième étape » ;
- B_n l'événement « la particule est en B à la n-ième étape ».

À l'instant initial ($n = 0$), la particule est en A.
On note $p, q \in]0, 1[$ tels que :

- la probabilité de passer de A à B soit égale à p ;
- la probabilité de passer de B à A soit égale à q.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1})$, $\mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1})$, $\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Déterminer $\mathbb{P}(A_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(A_n)$.
(b) En déduire une expression de $\mathbb{P}(A_n)$ en fonction de n.

3. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, la probabilité $\mathbb{P}(B_n)$.

4. On suppose que $\left|1 - (p + q)\right| < 1$.
Calculer les limites des suites $\left(\mathbb{P}(A_n)\right)_n$ et $\left(\mathbb{P}(B_n)\right)_n$.

indication

1. Utiliser les définitions de p et q et le fait que (A_{n+1}, B_{n+1}) forme un S.C.E.

2. **(a)** Utiliser la formule des probabilités totales.
(b) En notant $a_n := \mathbb{P}(A_n)$, déterminer le terme général de $(a_n)_n$ dont on a une relation de récurrence.

3. On a $\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_n) = 1$.

résultat

1. $\mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) = p$, $\mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) = 1 - q$, $\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) = q$ et $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = 1 - p$.

2. **(a)** $\mathbb{P}(A_{n+1}) = (1 - p - q)\mathbb{P}(A_n) + q$.
(b) $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{q}{p+q} + \dfrac{p}{p+q}(1 - p - q)^n$.

3. $\mathbb{P}(B_n) = \dfrac{p}{p+q} - \dfrac{p}{p+q}(1 - p - q)^n$.

4. $\mathbb{P}(A_n) \longrightarrow \dfrac{q}{p+q}$ et $\mathbb{P}(B_n) \longrightarrow \dfrac{p}{p+q}$.

Exercice 24.6

On admet que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *converge et que* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et calculer sa somme.

indication

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

résultat

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice 24.7

Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+r)}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+r)} = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k}.$$

indication

- Écrire $\frac{1}{n(n+r)} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+r}\right)$.
- Écrire, pour $N > r$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+r)} = \frac{1}{r}\left(\sum_{n=1}^{r} \frac{1}{n} - \sum_{n=N+1}^{N+r} \frac{1}{k}\right)$$

et majorer la deuxième somme, puis passer à la limite.

Exercice 24.8

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $\sum_{n} \frac{1}{(pn)!}$ converge et calculer sa somme.

indication

- L'inégalité de Taylor-Lagrange permet de montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tz)^n}{n!} = e^{tz}$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$.
- Utiliser les racines p-ièmes de l'unité.

résultat

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(pn)!} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \exp(\omega^k) \text{ avec } \omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{p}}.$$