Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025

William GREGORY

Colle 24

Équations différentielles, Probabilités, Séries numériques

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mardi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Équations différentielles

Exercice 24.1

Soient $a \neq 0$ et $b, c \in \mathbb{R}$.
Résoudre, sur $]0, +\infty[$, l'équation

$$at^2y'' + bty' + cy = 0.$$

Indication. Déterminer une équation vérifiée par z où $y = z \circ \ln$.

Exercice 24.2

Soit I un intervalle. Soient $a, b > 0$.
Déterminer l'ensemble des solutions de

$$\begin{cases} y > 0 \text{ sur } I \\ y' = (a - by)y. \end{cases}$$

Indication. Déterminer une équation vérifiée par $z := \dfrac{1}{y}$.

Probabilités

Exercice 24.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements mutuellement indépendants.
On note B l'événement « aucun des A_k n'est réalisé ».
Montrer que

$$\mathbb{P}(B) \leqslant \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\right).$$

Exercice 24.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une classe de n élèves organise un Noël canadien : chaque élève apporte un cadeau emballé et indistinguable des autres.

1. Déterminer la probabilité p_n qu'au moins un élève reçoive le cadeau qu'il a apporté.
2. Montrer que $p_n \longrightarrow 1 - \dfrac{1}{e}$.

Exercice 24.5 Chaîne de Markov à deux états.

On considère deux états A et B et une particule se déplaçant entre ces deux états.
On note :

- A_n l'événement « la particule est en A à la n-ième étape » ;
- B_n l'événement « la particule est en B à la n-ième étape ».

À l'instant initial ($n = 0$), la particule est en A.
On note $p, q \in]0, 1[$ tels que :

- la probabilité de passer de A à B soit égale à p ;
- la probabilité de passer de B à A soit égale à q.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\mathbb{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{B}_{n+1})$, $\mathbb{P}_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{B}_{n+1})$, $\mathbb{P}_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{A}_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{A}_{n+1})$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Déterminer $\mathbb{P}(\mathrm{A}_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$.
(b) En déduire une expression de $\mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$ en fonction de n.

3. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, la probabilité $\mathbb{P}(\mathrm{B}_n)$.

4. On suppose que $\left|1 - (p + q)\right| < 1$.
Calculer les limites des suites $\left(\mathbb{P}(\mathrm{A}_n)\right)_n$ et $\left(\mathbb{P}(\mathrm{B}_n)\right)_n$.

Séries numériques

Exercice 24.6

On admet que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *converge et que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 24.7

Soit $r \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+r)}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+r)} = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k}.$$

Exercice 24.8

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{n} \frac{1}{(pn)!}$ converge et calculer sa somme.