William GREGORY

Colle 25 • INDICATIONS

Séries numériques

Exercice 25.1

1. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la série

$$\sum_{n\geqslant 1}\Big(\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)\Big)$$

converge.

2. Calculer dans ce cas sa somme.

indication

1. Utiliser les propriétés du logarithme pour établir l'existence de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2) = \alpha\ln(n) + \frac{\beta}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

2. Procéder par télescopage ou changement d'indice.

résultat

1. $\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2) = (1+a+b)\ln(n) + \dfrac{a+2b}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ d'où $a = -2$ et $b = 1$.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)\Big) = -\ln(2)$.

Exercice 25.2

Soit $(a_n)_n$ une suite de réels positifs.
On considère les assertions suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \displaystyle\sum_n a_n \text{ converge;} \\ \text{(ii)} & \displaystyle\sum_n \sqrt{a_n a_{n+1}} \text{ converge.} \end{array}$$

1. A-t-on (i) $\implies$ (ii) ?

2. A-t-on (ii) $\implies$ (i) ?

indication

1. Penser à l'inégalité arithmético-géométrique $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$.
2. C'est faux. On peut par exemple considérer une série dont tous les termes d'ordre impair sont nuls.

Exercice 25.3

Justifier l'existence et calculer

$$\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2+n^2}.$$

indication

Procéder par comparaison série-intégrale pour établir une formule du type

$$\forall N\ in \mathbb{N}^*,\quad \int_1^{n+1} \frac{a}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{a}{a^2+n^2} \leqslant \int_0^N \frac{a}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

résultat

$$\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2+n^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 25.4

Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \underset{\alpha\to1^+}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}.$$

indication

Procéder par comparaison série intégrale avec la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$.

Exercice 25.5

Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

indication

Utiliser une comparaison série intégrale avec la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

résultat

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}.$$

Exercice 25.6

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{H}_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Montrer que

$$\mathrm{H}_n = \ln(n) + \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

indication

- Utiliser le théorème des accroissements finis sur le segment $[x, x+1]$ pour montrer que

$$\forall x < 0, \quad \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

- Utiliser une comparaison série intégrale pour montrer que $\mathrm{H}_n \sim \ln(n)$.
- En posant $u_n := \mathrm{H}_n - \ln(n)$, montrer que $(u_n)_n$ est bornée et monotone, en exploitant ce qui précède, puis en déduire que

$$\exists \gamma \in \mathbb{R} :: \quad \mathrm{H}_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

- Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_k := \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n := \mathrm{H}_n - \ln(n) - \gamma$.
  - Utiliser que $\mathrm{H}_n = \frac{1}{n} + \mathrm{H}_{n-1}$, $\frac{1}{k} = \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t$ et $\ln(n) = \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ pour montrer que $v_n = \frac{1}{n} - \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$.
  - Montrer que $0 < a_k < \frac{1}{k(k+1)}$ puis que $0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n}$.

Exercice 25.7

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $\sum_n \frac{1}{(pn)!}$ converge et calculer sa somme.

indication

- L'inégalité de Taylor-Lagrange permet de montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tz)^n}{n!} = \mathrm{e}^{tz}$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$.
- Utiliser les racines p-ièmes de l'unité.

résultat

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(pn)!} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \exp(\omega^k) \text{ avec } \omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{p}}.$$

Exercice 25.8

On admet que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *converge et que* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$ converge et calculer sa somme.

indication

Pour la convergence, un équivalent suffit. Pour le calcul, on commencera par décomposer en éléments simples et on pourra s'aider de la décomposition $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

résultat

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{(}n+1)^2} = \frac{\pi^2}{3} - 3.$$

Exercice 25.9

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, telle que $f(0) \neq 0$.

1. Montrer que $\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)\,\mathrm{d}t \sim \frac{f(0)}{n}$.

2. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)\,\mathrm{d}t$.

indication

1. On utilise l'inégalité triangulaire intégrale et le fait que $t^n \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ lorsque $t \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ pour montrer que

$$\left| \int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)\,\mathrm{d}t - \frac{f(0)}{n} \right| \leqslant \frac{1}{n} \sup_{t\in\left[0,\frac{1}{n}\right]} \left|f(t) - f(0)\right|,$$

où $\sup_{t\in\left[0,\frac{1}{n}\right]} \left|f(t) - f(0)\right| \longrightarrow 0$ par continuité.

2. On utilise les équivalents.

résultat

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \quad\Longleftrightarrow\quad \alpha > 0.$$

Exercice 25.10 Suite décroissante sommable.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante.

1. On suppose que $\sum u_n$ converge.

(a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad nu_n \leqslant 2 \sum_{k=\lfloor n/2\rfloor+1}^{n} u_k.$$

(b) En déduire que

$$u_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n := \dfrac{1}{1+n^2u_n}$.

Montrer que

$$\sum v_n \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad \sum u_n \text{ diverge.}$$

indication

1. (a) Distinguer deux cas suivant la parité de n et minorer $\displaystyle\sum_{k=\lfloor n/2\rfloor+1}^{n} u_k$ par le plus petit terme (utiliser la décroissance de $(u_n)_n$) que l'on multiplie par le nombre de termes.

(b) Par encadrement en utilisant la question précédente.

2. Raisonner par contraposée et montrer que $\dfrac{1}{n} = o(v_n)$.