William GREGORY

Colle 25

Séries numériques

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mardi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Exercice 25.1

1. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la série

$$\sum_{n\geqslant 1}\Big(\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)\Big)$$

converge.

2. Calculer dans ce cas sa somme.

Exercice 25.2

Soit $(a_n)_n$ une suite de réels positifs.
On considère les assertions suivantes :

(i) $\sum_n a_n$ converge ;

(ii) $\sum_n \sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge.

1. A-t-on (i) $\Longrightarrow$ (ii) ?

2. A-t-on (ii) $\Longrightarrow$ (i) ?

Exercice 25.3

Justifier l'existence et calculer

$$\lim_{a\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{a^2+n^2}.$$

Exercice 25.4

Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha} \underset{\alpha\to 1^+}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}.$$

Exercice 25.5

Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 25.6

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{H}_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Montrer que

$$\mathrm{H}_n = \ln(n) + \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 25.7

Soit $p\in\mathbb{N}^*$.

Montrer que $\displaystyle\sum_n \frac{1}{(pn)!}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 25.8

On admet que $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2(n+1)^2}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 25.9

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Soit $f : [0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue, telle que $f(0)\neq 0$.

1. Montrer que $\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)\,\mathrm{d}t \sim \frac{f(0)}{n}$.

2. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 25.10 Suite décroissante sommable.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante.

1. On suppose que $\sum u_n$ converge.

(a) Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad nu_n\leqslant 2\sum_{k=\lfloor n/2\rfloor+1}^{n}u_k.$$

(b) En déduire que

$$u_n=o\left(\frac{1}{n}\right).$$

2. On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $v_n:=\frac{1}{1+n^2u_n}$.

Montrer que

$$\sum v_n \text{ converge} \quad\Longrightarrow\quad \sum u_n \text{ diverge.}$$