William GREGORY

Colle 26 • INDICATIONS

Variables aléatoires

Exercice 26.1

Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in [0,1]^{\mathbb{N}^*}$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n \sim \mathscr{B}(p_n).$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \quad \text{et} \quad m_n := \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n}.$$

Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big(|S_n - m_n| \geqslant \varepsilon\Big) = 0.$$

indication

Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 26.2 Loi géométrique tronquée.

Un pièce tombe sur PILE avec une probabilité $p \in \,]0,1[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance la pièce n fois.
On définit X la variable aléatoire par :

- $X = 0$ si la pièce ne tombe jamais sur PILE ;
- $X = k$ ($k \in [\![1,n]\!]$) lorsque la pièce tombe sur PILE pour la première fois au k-ième lancer.

Déterminer la loi de X et son espérance.

indication

- Modéliser chaque lancer par une variable aléatoire X_i à valeurs dans $\{0,1\}$ et écrire l'évènement $(X = k)$ comme une intersection de $(X_i = \cdots)$.
- Il s'agit de calculer une somme du type $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

  On peut raisonner avec des polynômes / fractions rationnelles ou des fonctions polynomiales et des sommes géométriques.

résultat

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathbb{P}(X=0) = (1-p)^n \\ \forall k \in [\![1,n]\!], \quad \mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1}p. \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{n(1-p)^{n+1} - (n+1)(1-p)^n + 1}{p}.$$

Exercice 26.3

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires admettant une espérance et une variance. On suppose que

$$\begin{cases} \exists c \in \mathbb{R}_+ \quad : \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n] = c \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(X_n) = 0. \end{cases}$$

Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big(|X_n - c| \geqslant \varepsilon\Big) = 0.$$

indication

- Utiliser l'inégalité triangulaire pour étudier séparément

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big(|X_n - \mathbb{E}[X_n]| \geqslant \varepsilon\Big) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big(|\mathbb{E}[X_n] - c| \geqslant \varepsilon\Big).$$

- Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big(|X_n - \mathbb{E}[X_n]| \geqslant \varepsilon\Big)$.

Exercice 26.4

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ avec $m \leqslant n$. On considère $X, Y \sim \mathscr{U}\Big([\![1, n]\!]\Big)$ indépendantes. On pose

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Z(\omega) := \begin{cases} X(\omega) \text{ si } Y(\omega) \leqslant m \\ Y(\omega) \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de Z et son espérance.

2. Déterminer m maximisant $\mathbb{E}[Z]$.

indication

1. Écrire $Z = k$ comme union disjointe de deux évènements, à l'aide de la définition de $Z(\omega)$.

2. $\mathbb{E}[Z]$ est un polynôme de degré 2 en m. On peut donc chercher son maximum.

résultat

$$Z(\Omega) = [\![1, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, n]\!], \mathbb{P}(Z = k) = \begin{cases} \dfrac{m}{n^2} \text{ si } k \leqslant m \\ \dfrac{m}{n^2} + \dfrac{1}{n} \text{ si } k > m. \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{-m^2 + mn + (n+1)n}{2n}.$$

$$m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Exercice 26.5

On lance un dé cubique parfait. Déterminer un nombre de lancers minimal pour pouvoir affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 5%, que la fréquence d'apparition du 6 diffère de $1/6$ d'au plus $1/100$.

indication

Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec X et $\varepsilon \leftarrow \varepsilon n$, ou avec $Y := \dfrac{X}{n}$ pour montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

résultat

$$n \geqslant 27778.$$

Exercice 26.6 Inégalité de Cantelli.

Soit X une variable aléatoire admettant une variance σ^2 finie.
Montrer que

$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|X - \mathbb{E}[X]\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

Exercice 26.7

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles suivant une loi uniforme sur l'ensemble $\Big\{(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)\Big\}$.

1. Préciser les lois des variables X et Y.
2. Calculer la covariance des variables X et Y. Celles-ci sont-elles indépendantes ?
3. Les variables $U := X + Y$ et $V := X - Y$ sont-elles indépendantes ?

résultat

1. X et Y suivent la même loi, avec $\mathbb{P}(X = 0) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \dfrac{1}{4}$.
2. $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ mais X et Y ne sont pas indépendantes.
3. U et V suivent une loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ et sont indépendantes.

Exercice 26.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, \cdots, n\}$.
Montrer que

$$\forall m \in \{1, \cdots, n\}, \quad \frac{\mathbb{E}[X] - m + 1}{n} \leqslant \mathbb{P}(X \geqslant m) \leqslant \frac{\mathbb{E}[X]}{m}.$$

indication

- Utiliser Markov pour une inégalité.
- Pour l'autre inégalité, écrire

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{m-1} k\mathscr{P}(X = k) + \sum_{k=m}^{n} k\mathscr{P}(X = k)$$

  et majorer chacune des sommes.