Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025

William GREGORY

Colle 26

Variables aléatoires

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mardi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Exercice 26.1

Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in [0,1]^{\mathbb{N}^*}$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n \sim \mathscr{B}(p_n).$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \quad \text{et} \quad m_n := \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n}.$$

Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big(|S_n - m_n| \geqslant \varepsilon\Big) = 0.$$

Exercice 26.2 Loi géométrique tronquée.

Un pièce tombe sur PILE avec une probabilité $p \in]0,1[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance la pièce n fois. On définit X la variable aléatoire par :

- $X = 0$ si la pièce ne tombe jamais sur PILE ;
- $X = k$ ($k \in [\![1,n]\!]$) lorsque la pièce tombe sur PILE pour la première fois au k-ième lancer.

Déterminer la loi de X et son espérance.

Exercice 26.3

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires admettant une espérance et une variance. On suppose que

$$\begin{cases} \exists c \in \mathbb{R}_+ \quad : \quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n] = c \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{V}(X_n) = 0. \end{cases}$$

Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big(|X_n - c| \geqslant \varepsilon\Big) = 0.$$

Exercice 26.4

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ avec $m \leqslant n$. On considère $X, Y \sim \mathscr{U}\left(\llbracket 1, n \rrbracket\right)$ indépendantes. On pose

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Z(\omega) := \begin{cases} X(\omega) \text{ si } Y(\omega) \leqslant m \\ Y(\omega) \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de Z et son espérance.

2. Déterminer m maximisant $\mathbb{E}[Z]$.

Exercice 26.5

On lance un dé cubique parfait. Déterminer un nombre de lancers minimal pour pouvoir affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 5%, que la fréquence d'apparition du 6 diffère de $1/6$ d'au plus $1/100$.

Exercice 26.6 Inégalité de Cantelli.

Soit X une variable aléatoire admettant une variance σ^2 finie.
Montrer que

$$\forall a > 0, \; \mathbb{P}\left(\left|X - \mathbb{E}[X]\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

Exercice 26.7

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles suivant une loi uniforme sur l'ensemble $\left\{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\right\}$.

1. Préciser les lois des variables X et Y.

2. Calculer la covariance des variables X et Y. Celles-ci sont-elles indépendantes ?

3. Les variables $U := X + Y$ et $V := X - Y$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 26.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, \cdots, n\}$.
Montrer que

$$\forall m \in \{1, \cdots, n\}, \quad \frac{\mathbb{E}[X] - m + 1}{n} \leqslant \mathbb{P}(X \geqslant m) \leqslant \frac{\mathbb{E}[X]}{m}.$$