Colle 27 • INDICATIONS
Dimension finie

Exercice 27.1 Noyaux et images itérés, cœur et nilespace.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in \mathrm{L}(E)$.

1. Montrer que
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Ker}(u^k) \subset \mathrm{Ker}(u^{k+1}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(u^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(u^k).$$

2. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^{k+1})$.
On notera p le plus petit entier k vérifiant cette propriété.

3. Montrer que
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Ker}(u^{p+k}) = \mathrm{Ker}(u^p) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(u^{p+k}) = \mathrm{Im}(u^p)$$

4. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u^p) \oplus \mathrm{Im}(u^p)$.

Les sous-espaces $\mathrm{Im}(u^p)$ *et* $\mathrm{Ker}(u^p)$ *s'appellent respectivement « cœur » et « nilespace » de* u.

indication

1. Essentiellement, $u^{k+1}(\cdots) = u^k(u(\cdots))$.

2. Raisonner avec la suite $\left(\dim(\mathrm{Ker}(u^k))\right)_{k \in \mathbb{N}}$.

3.
- L'égalité des noyaux peut se démontrer par récurrence.
- L'égalité des images peut se démontrer à l'aide d'une inclusion et de l'égalité des dimensions, obtenue par le théorème du rang.

4. Utiliser les dimensions et montrer que l'intersection est nulle.

Exercice 27.2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Montrer que
$$\exists f \in \mathrm{L}(E) : \quad \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f) \quad \Longleftrightarrow \quad \dim(E) \text{ est paire.}$$

indication

$\boxed{\Rightarrow}$ Utiliser le théorème du rang.

$\boxed{\Leftarrow}$ En se donnant $(e_1, \ldots, e_{2p})$ une base de E, construire les $f(e_i)$, en distinguant par exemple les $i \in [\![1, p]\!]$ et $i \in [\![p+1, 2p]\!]$.

Exercice 27.3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soient $u, v \in \mathrm{L}(E)$. On note $w := u_{|\,\mathrm{Im}(v)}$.

1. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(w) \subset \mathrm{Ker}(u) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Im}(u \circ v).$$

2. En déduire que

$$\dim\Big(\mathrm{Ker}(u \circ v)\Big) \leqslant \dim\Big(\mathrm{Ker}(u)\Big) + \dim\Big(\mathrm{Ker}(v)\Big).$$

indication

2. Utiliser le théorème du rang pour $w : \mathrm{Im}(v) \longrightarrow E$ et utiliser les inclusions précédentes pour obtenir des inégalités sur les dimensions.

Exercice 27.4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $f, g \in \mathrm{L}(E)$.
Montrer que

$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - n \leqslant \mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min\Big(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\Big).$$

indication

- Pour l'inégalité de droite, commencer par montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$ pour majorer par $\mathrm{rg}(g)$. Ensuite, majorer $\mathrm{rg}(g \circ f)$ par $\mathrm{rg}(f)$ en utilisant l'application $g_{|\,\mathrm{Im}(f)}$.
- Appliquer le théorème du rang à $g_{|\,\mathrm{Im}(f)}$ et utiliser que $\mathrm{Ker}(g_{|\,\mathrm{Im}(f)}) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

Exercice 27.5

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathrm{L}(E)$ tel que $f^{n-1} \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$ et $f^n = 0_{\mathrm{L}(E)}$.

1. Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0_E$.
Montrer que $\Big(x, f(x), \cdots, f^{n-1}(x)\Big)$ est une base de E.

2. Soit $g \in \mathrm{L}(E)$. Montrer que

$$g \circ f = f \circ g \quad \Longleftrightarrow \quad g \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f, \cdots, f^{n-1}).$$

indication

1. On peut écrire une relation de liaison, raisonner par l'absurde et fixer p tel que $\lambda_p \neq 0$, puis composer par f^{n-1-p}.

2. À x fixé, $g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x)$. Pour prouver que $g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$, il suffit de prouver que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad g(f^k(x)) = a_0 f^k(x) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(f^k(x)).$$

Exercice 27.6

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathrm{L}(E)$.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) \\ \text{(ii)} & \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2) \\ \text{(iii)} & \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2). \end{array}$$

indication

- (i) $\implies$ (ii) et (ii) $\implies$ (iii) : montrer une inclusion et l'égalité des dimensions par le théorème du rang.
- (iii) $\implies$ (i) : pour $x \in E$, $u(x) \, \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$ donc $u(x) = u^2(z)$, et écrire

$$x = x - u(z) + u(z),$$

pour montrer que $E = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u)$.

Exercice 27.7

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Déterminer l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tous les autres.

indication

- On commence par montrer que $f \in \mathrm{L}(E)$ est une homothétie si, et seulement si,

$$\forall x \in E, \quad (x, f(x)) \text{ est liée.}$$

- On pourra penser, étant donné un vecteur x non nul, à la projection sur la droite $\mathrm{Vect}\,\{x\}$.

résultat

Il s'agit des homothéties.