Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025
William GREGORY

Colle 27
Dimension finie

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mardi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Exercice 27.1 Noyaux et images itérés, cœur et nilespace.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in \mathrm{L}(E)$.

1. Montrer que
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Ker}(u^k) \subset \mathrm{Ker}(u^{k+1}) \ \text{ et } \ \mathrm{Im}(u^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(u^k).$$

2. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^{k+1})$.
On notera p le plus petit entier k vérifiant cette propriété.

3. Montrer que
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Ker}(u^{p+k}) = \mathrm{Ker}(u^p) \ \text{ et } \ \mathrm{Im}(u^{p+k}) = \mathrm{Im}(u^p)$$

4. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u^p) \oplus \mathrm{Im}(u^p)$.

Les sous-espaces $\mathrm{Im}(u^p)$ *et* $\mathrm{Ker}(u^p)$ *s'appellent respectivement « cœur » et « nilespace » de* u.

Exercice 27.2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Montrer que
$$\exists f \in \mathrm{L}(E) : \ \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f) \quad \Longleftrightarrow \quad \dim(E) \text{ est paire.}$$

Exercice 27.3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soient $u, v \in \mathrm{L}(E)$. On note $w := u_{|\,\mathrm{Im}(v)}$.

1. Montrer que
$$\mathrm{Ker}(w) \subset \mathrm{Ker}(u) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Im}(u \circ v).$$

2. En déduire que
$$\dim\Big(\mathrm{Ker}(u \circ v)\Big) \leqslant \dim\Big(\mathrm{Ker}(u)\Big) + \dim\Big(\mathrm{Ker}(v)\Big).$$

Exercice 27.4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $f, g \in \mathrm{L}(E)$.
Montrer que

$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - n \leqslant \mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min\Big(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\Big).$$

Exercice 27.5

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathrm{L}(E)$ tel que $f^{n-1} \neq 0_{\mathrm{L}(E)}$ et $f^n = 0_{\mathrm{L}(E)}$.

1. Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0_E$.
Montrer que $\Big(x, f(x), \cdots, f^{n-1}(x)\Big)$ est une base de E.

2. Soit $g \in \mathrm{L}(E)$. Montrer que

$$g \circ f = f \circ g \quad \iff \quad g \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f, \cdots, f^{n-1}).$$

Exercice 27.6

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soit $u \in \mathrm{L}(E)$.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$
(ii) $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$
(iii) $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$.

Exercice 27.7

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Déterminer l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tous les autres.