Colle 28 • INDICATIONS

Matrices et applications linéaires

Exercice 28.1

Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on considère

$$f_1 : x \longmapsto \sin^2(x), \qquad f_2 : x \longmapsto \cos^2(x), \qquad f_3 : x \longmapsto \sin(2x),$$
$$f_4 : x \longmapsto \cos(2x), \qquad f_5 : x \longmapsto \sin(x)\cos(x).$$

Déterminer $\mathrm{rg}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$.

indication

Utiliser les formules trigonométriques pour montrer que $\mathrm{rg}(f_1, f_2, f-3, f_4, f_5) \leqslant 3$ et évaluer en des x bien choisis.

résultat

$$\mathrm{rg}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) = 3.$$

Exercice 28.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit

$$u : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] \\ P & \longmapsto & P(\mathrm{X}) - P(\mathrm{X}-1). \end{array} \right.$$

1. Montrer que $u \in \mathrm{L}\Big(\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]\Big)$.

2. Déterminer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.

3. Calculer $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$.

indication

1. Ne pas oublier de vérifier que $u(\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]) \subset \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.

2. Utiliser la formule du binôme de Newton.

3. Utiliser la question précédente et le théorème du rang pour le noyau.

résultat

2. $u(1) = 0$ et, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $u(\mathrm{X}^k) = (-1)^{k+1} \sum j = 0^{k-1} \binom{k}{j} (-1)^j X^j$.

3. $\mathrm{Im}(u) = \mathbb{K}_{n-1}[\mathrm{X}]$ et $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}\{1\}$.

Exercice 28.3

Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.
On considère l'endomorphisme

$$f : \left| \begin{array}{rcl} \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array} \right.$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

2. L'endomorphisme f est-il surjectif ?

3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

4. A-t-on $\mathrm{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$?

indication

1. Résoudre un système d'équations.

2. Utilise le théorème du rang, et/ou un argument de dimension.

3. Calculer $f(\mathrm{E}_{1,1}), \dots, f(\mathrm{E}_{2,2})$.

4. Utiliser la somme des dimensions et l'intersection.

résultat

1. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

2. Non.

3. $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right\}$.

4. Oui.

Exercice 28.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle.
Montrer que M est semblable à une matrice n'ayant que des 0 sur la diagonale.

Indication. On pourra utiliser que, dans un espace vectoriel E, pour $f \in \mathrm{L}(E)$,

$$\forall x \in E, \big(x, f(x)\big) \text{ est liée} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est une homothétie.}$$

indication

Raisonner par récurrence sur n, en distinguant les cas où f est une homothétie et f ne l'est pas.

Exercice 28.5

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $u \in \mathrm{L}(E)$ tel que

$$u^n = 0_{\mathrm{L}(E)} \quad \text{et} \quad u^{n-1} \neq 0_{\mathrm{L}(E)}.$$

1. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & & & & (0) \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec u.

indication

1. Se donner un vecteur $x_0 \in E$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0_E$ et montrer que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

2. On note A la matrice précédente. Soit B telle que $AB = BA$. Exploiter l'égalité $AB = BA$ coefficient par coefficient pour montrer que le commutant de A est $\mathrm{Vect}\{A^k\}_{k \in [\![0, n-1]\!]}$.

Exercice 28.6

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(MM^\top)$.

indication

- Montrer que $\mathrm{rg}(M^\top) = \mathrm{rg}(MM^\top)$.
- Appliquer le théorème du rang à $M^\top$ et $MM^\top$.
- Montrer que $\mathrm{Ker}(M^\top) = \mathrm{Ker}(MM^\top)$.
  - $\boxed{\subset}$ Sans difficulté.
  - $\boxed{\supset}$ Plus difficile, on pourra remarquer que $\mathrm{Tr}(B^\top B) = 0 \implies B = 0$.

Exercice 28.7

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.
Soit $r \in [\![0, n]\!]$. Soit $u \in \mathrm{L}(E)$ de rang r.
Montrer que u peut s'écrire comme la somme de r endomorphismes de rang 1.

indication

Utiliser que toute matrice de rang r est équivalente à J_r.