William GREGORY

Colle 28

Matrices et applications linéaires

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mardi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Exercice 28.1

Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on considère

$$f_1 : x \longmapsto \sin^2(x), \qquad f_2 : x \longmapsto \cos^2(x), \qquad f_3 : x \longmapsto \sin(2x),$$
$$f_4 : x \longmapsto \cos(2x), \qquad f_5 : x \longmapsto \sin(x)\cos(x).$$

Déterminer $\mathrm{rg}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$.

Exercice 28.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit

$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X) - P(X-1). \end{array} \right.$$

1. Montrer que $u \in \mathrm{L}\big(\mathbb{K}_n[X]\big)$.

2. Déterminer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

3. Calculer $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$.

Exercice 28.3

Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.
On considère l'endomorphisme

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array} \right.$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

2. L'endomorphisme f est-il surjectif ?

3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

4. A-t-on $\mathrm{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$?

Exercice 28.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle.
Montrer que M est semblable à une matrice n'ayant que des 0 sur la diagonale.

Indication. On pourra utiliser que, dans un espace vectoriel E, pour $f \in \mathrm{L}(E)$,

$$\forall x \in E, \big(x, f(x)\big) \text{ est liée} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est une homothétie.}$$

Exercice 28.5

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $u \in \mathrm{L}(E)$ tel que

$$u^n = 0_{\mathrm{L}(E)} \quad \text{et} \quad u^{n-1} \neq 0_{\mathrm{L}(E)}.$$

1. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & & & & (0) \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec u.

Exercice 28.6

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(MM^\top)$.

Exercice 28.7

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.
Soit $r \in [\![0, n]\!]$. Soit $u \in \mathrm{L}(E)$ de rang r.
Montrer que u peut s'écrire comme la somme de r endomorphismes de rang 1.