Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025
William GREGORY

Colle 29 • INDICATIONS
Polynômes

Exercice 29.1

Le polynôme $P := X^3 + X^2 - 3X + 2$ admet-il des racines rationnelles ?

indication

Prendre une racine rationnelle $\alpha = \frac{p}{q}$, écrire $P(\alpha) = 0$, montrer que $p \mid 2$ et $q \mid 1$ pour déterminer les α possibles, puis conclure.

résultat

Non.

Exercice 29.2

Soit $n \geqslant 3$. On pose

$$A := X^n + 3X + 2 \quad \text{et} \quad B := X^3 - 2X^2 + X.$$

Déterminer le reste dans la division euclidienne de A par B.

indication

Commencer par écrire $B = X(X-1)^2$ pour déterminer ses racines, puis évaluer la relation $A = BQ + R$ en $X = 0$, $X = 1$ et sa dérivée en $X = 1$ (car 1 est racine double de B), pour déterminer les coefficients de R (de degré 2 car B est de degré 3).

résultat

$$R = (n-1)X^2 + (5-n)X + 2.$$

Exercice 29.3

Soit $n \geqslant 2$.

1. Factoriser le polynôme $1 + X + \cdots + X^{n-1}$.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)$.

indication

1. Remarquer que $(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^{n-1}+\cdots+\mathrm{X}+1)=\mathrm{X}^n-1$.
2. Évaluer la factorisation en $\mathrm{X}=1$ et factoriser par l'angle moitié.
3. Évaluer la factorisation en $\mathrm{X}=\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}$ et factoriser par l'angle moitié.

résultat

1. $1+\mathrm{X}+\cdots+\mathrm{X}^{n-1}=\prod_{k=1}^{n-1}\left(X-\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}\right)$.
2. $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}$.
3. $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}+\theta\right)=\frac{\sin(n\theta)}{2^{n-1}}$.

Exercice 29.4

Soit $n\in\mathbb{N}$. Soient $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{Z}$. On pose

$$P:=a_0+a_1\mathrm{X}+\cdots+a_n\mathrm{X}^n\in\mathbb{Z}[\mathrm{X}].$$

Montrer que, si P admet une racine $\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, avec $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}^*$ et $p\wedge q=1$, alors

$$p\mid a_0 \quad \text{et} \quad q\mid a_n\,.$$

indication

Utiliser la relation $P(\alpha)=0$ multipliée par q^n, factoriser par p et par q pour démontrer les deux résultats.

Exercice 29.5

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $\theta\in\mathbb{R}$.
Factoriser, dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, le polynôme

$$X^{2n}-2\cos(\theta)\mathrm{X}^n+1.$$

indication

Factoriser $\mathrm{Y}^2-2\cos(\theta)\mathrm{Y}+1$ puis substituer par $\mathrm{Y}=\mathrm{X}^n$, et déterminer les racines de $\mathrm{X}^n-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\mathrm{X}^n-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

résultat

$$X^{2n}-2\cos(\theta)\mathrm{X}^n+1=\prod_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{X}^2-2\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+1\right)$$

Exercice 29.6

Soit $n \geqslant 2$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que le polynôme

$$P := \mathrm{X}^n + a\mathrm{X} + b$$

a au plus trois racines réelles distinctes.

indication

Utiliser le théorème de Rolle et les dérivées de P.

Exercice 29.7

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme T_n vérifiant

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{T}_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta). \qquad (\star)$$

2. Déterminer une relation entre T_n, T_{n+1} et T_{n+2}.

3. Déterminer une équation différentielle vérifiée par T_n.

4. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer ${\mathrm{T}_n}^{(k)}(1)$ et ${\mathrm{T}_n}^{(k)}(-1)$.

indication

1. Pour l'existence, montrer que $\cos(n\theta)$ est un polynôme en $\cos(\theta)$.

2. Exprimer $\cos(n\theta)$ et $\cos\big((n+2)\theta\big)$ en fonction de $\cos\big((n+1)\theta\big)$, $\cos(\theta)$, $\sin\big((n+1)\theta\big)$ et $\sin(\theta)$.

3. Dériver deux fois en θ la relation définissant T_n.

4. Dériver k fois en θ la relation définissant T_n.

résultat

2. $\mathrm{T}_{n+2} + \mathrm{T}_n = 2\mathrm{X}\,\mathrm{T}_{n+1}$.

3. $(1-\mathrm{X}^2){\mathrm{T}_n}'' - \mathrm{X}\,{\mathrm{T}_n}' + n^2\mathrm{T}_n = 0$.

4. $${\mathrm{T}_n}^{(k)}(1) = \begin{cases} \dfrac{2^k k!(n-1)!(n+k-1)!}{(2k)!(n-k)!} & \text{si} \quad k \leqslant n \\ 0 & \text{si} \quad k > n \end{cases}$$

et ${\mathrm{T}_n}^{(k)}(-1) = (-1)^{n-k}{\mathrm{T}_n}^{(k)}(1)$.

Exercice 29.8

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$

$$\Delta : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X). \end{array} \right.$$

1. Déterminer $\operatorname{Ker}(\Delta)$ et $\operatorname{Im}(\Delta)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.
Montrer que

$$\Delta^n(P) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(X+k).$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(P) < n$.
En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k P(k) = 0.$$

indication

1. Pour le noyau, regarder le coefficient de Δ. Pour l'image, il s'agit de montrer que Δ est surjectif. On peut construire une base de l'image, ou raisonner sur les restrictions aux $\mathbb{C}_n[X]$.

2. Écrire Δ comme somme de deux endomorphismes qui commutent, en appliquer le binôme de Newton.

3. Évaluer en $X = 0$.